

TRONC COMMUN · LEÇON 15

Statistiques

Position · Dispersion · Variance et écart-type

Ce que nous allons apprendre

- Le vocabulaire statistique
- Moyenne, médiane et mode
- Les quartiles
- Étendue, variance et écart-type
- Les séries groupées en classes
- Interpréter la dispersion

Les mots de base

Terme	Signification
Population	l'ensemble étudié
Individu	un élément de la population
Caractère	ce que l'on observe
Effectif n_i	nombre d'individus pour la valeur x_i
Fréquence	$\frac{n_i}{N}$

Pondérée par les effectifs

FORMULE

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}$$

RÉUNION DE DEUX GROUPES

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

Exemple. 20 élèves à 12 et 30 élèves à 14 : $\frac{240 + 420}{50} = 13,2.$

Deux autres positions

Paramètre	Définition
Médiane (N impair)	valeur de rang $\frac{N + 1}{2}$
Médiane (N pair)	moyenne des rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$
Mode	valeur de plus grand effectif

AVANT TOUT

La série doit être **ordonnée**, et les effectifs cumulés aident à trouver le bon rang.

Découper en quatre

DÉFINITIONS

Q_1 est la plus petite valeur telle qu'au moins 25 % des données lui soient inférieures ou égales ; Q_3 correspond à 75 %.

Exemple. 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 11 ; 12 ; 15 avec $N = 8$.

- ❶ $\frac{N}{4} = 2$: Q_1 est la 2e valeur, soit 5.
- ❷ $\frac{3N}{4} = 6$: Q_3 est la 6e valeur, soit 11.
- ❸ Écart interquartile : $11 - 5 = 6$.

Variance et écart-type

FORMULES

$$V = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} \qquad \sigma = \sqrt{V}$$

UNITÉS

L'écart-type a la **même unité** que les données ; la variance, non (elle est au carré).

ÉTENDUE

$x_{\max} - x_{\min}$: très simple, mais sensible aux valeurs extrêmes.

Pas à pas

Énoncé. Série 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10.

- ➊ Moyenne : $\bar{x} = 6$.
- ➋ Écarts au carré : 16 ; 4 ; 0 ; 4 ; 16.
- ➌ $V = \frac{40}{5} = 8$ et $\sigma = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

Que dit l'écart-type ?

Écart-type	La série est...
petit	homogène : valeurs resserrées
grand	dispersée : valeurs étalées

EFFET D'UNE TRANSLATION

Ajouter une constante c à toutes les valeurs ajoute c à la moyenne et **ne change pas** l'écart-type.

Travailler avec les centres

Classe	Centre	Effectif
[0 ; 20[	10	12
[20 ; 40[	30	28
[40 ; 60[	50	10

MOYENNE

$$\frac{120 + 840 + 500}{50} = 29,2 ; \text{ la classe modale est } [20 ; 40[.$$

APPLICATION 1

Une série de notes

Énoncé. Valeurs 4 ; 7 ; 9 ; 12 d'effectifs 3 ; 6 ; 8 ; 3.

1 $N = 20$ et $\bar{x} = \frac{162}{20} = 8,1$.

2 Mode : 9 ; effectifs cumulés 3 ; 9 ; 17 ; 20, donc médiane 9.

3 $V = \frac{109,8}{20} = 5,49$, soit $\sigma \approx 2,34$.

Comparer deux séries

Énoncé. Deux séries ont la même moyenne 10, mais des écarts-types de 1,2 et 4,5.

- 1 La moyenne ne les distingue pas.
- 2 La première est très **homogène**.
- 3 La seconde est bien plus **dispersée** : moyenne et dispersion se lisent ensemble.

L'essentiel de la leçon

Paramètre	Formule
Moyenne	$\frac{\sum n_i x_i}{N}$
Médiane	valeur centrale, série ordonnée
Étendue	$x_{\max} - x_{\min}$
Variance	$\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$
Écart-type	$\sqrt{V}$