

TRONC COMMUN · LEÇON 14

Géométrie dans l'espace

Positions relatives · Parallélisme · Orthogonalité

Ce que nous allons apprendre

- Les règles de base de l'espace
- Positions relatives de droites et de plans
- Démontrer un parallélisme
- Le théorème du toit
- L'orthogonalité droite-plan
- Longueurs, aires et volumes

Ce qui détermine un plan

UN PLAN EST DÉTERMINÉ PAR...

trois points **non alignés** · une droite et un point hors de cette droite · deux droites **sécantes** · deux droites **parallèles** distinctes.

CONSÉQUENCE

Si deux points d'une droite appartiennent à un plan, alors la droite **entière** est contenue dans ce plan.

Quatre situations

Cas	Description
Confondues	coplanaires, tous les points communs
Sécantes	coplanaires, un seul point commun
Strictement parallèles	coplanaires, aucun point commun
Non coplanaires	aucun plan ne les contient

PIÈGE CLASSIQUE

Sans point commun, deux droites ne sont pas forcément parallèles : dans l'espace, elles peuvent être **non coplanaires**.

Les positions possibles

Objets	Positions
Droite et plan	incluse · parallèle · sécants en un point
Deux plans	confondus · parallèles · sécants selon une droite

À RETENIR

Deux plans sécants se coupent toujours selon une **droite**, jamais selon un seul point.

Le critère à deux droites

THÉORÈME

Si deux droites **sécantes** d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites d'un plan Q , alors P et Q sont **parallèles**.

Exemple. Dans un cube $ABCDEFGH$, montrer que (ABC) et (EFG) sont parallèles.

- 1 (AB) et (AC) sont sécantes dans (ABC) .
- 2 Elles sont parallèles à (EF) et (EG) du plan (EFG) .
- 3 Les deux plans sont donc parallèles.

Une intersection parallèle

ÉNONCÉ

Si deux plans sécants contiennent chacun une droite, et si ces deux droites sont **parallèles**, alors la droite d'intersection des plans leur est parallèle.

IMAGE MENTALE

Les deux pans d'un toit se rejoignent selon le faîtage, parallèle aux bords inférieurs.

Droite orthogonale à un plan

CRITÈRE

Une droite orthogonale à **deux droites sécantes** d'un plan est orthogonale à ce plan, donc à **toutes** ses droites.

NUANCE

Dans l'espace, « orthogonales » n'implique pas « sécantes » : deux droites peuvent être orthogonales sans se couper.

Exemple. Dans un cube, (AE) est orthogonale à (AB) et (AD) , donc au plan (ABD) , donc aussi à (BD) .

Deux diagonales à connaître

DANS UN CUBE D'ARÊTE a

$$\text{diagonale d'une face} = a\sqrt{2} \quad \text{grande diagonale} = a\sqrt{3}$$

- ❶ $AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ (Pythagore dans une face).
- ❷ $AG^2 = AC^2 + CG^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$.
- ❸ $AG = a\sqrt{3}$.

Les formules usuelles

Solide	Volume
Prisme droit et cylindre	$\mathcal{B} \times h$
Pyramide et cône	$\frac{\mathcal{B} \times h}{3}$
Boule	$\frac{4}{3}\pi R^3$

NE PAS CONFONDRE

La **hauteur** (perpendiculaire à la base) et l'**apothème** d'une pyramide ou la **génératrice** d'un cône.

APPLICATION 1

Une pyramide régulière

Énoncé. Base carrée de côté 10 cm, hauteur 12 cm.

- 1 $V = \frac{100 \times 12}{3} = 400 \text{ cm}^3.$
- 2 Apothème : $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}.$
- 3 Aire latérale : $\frac{40 \times 13}{2} = 260 \text{ cm}^2.$

APPLICATION 2

Un cône de révolution

Énoncé. Rayon 9 cm, génératrice 15 cm.

1 $h = \sqrt{225 - 81} = 12 \text{ cm.}$

2 $V = \frac{\pi \times 81 \times 12}{3} = 324\pi \text{ cm}^3.$

3 Aire totale : $\pi \times 81 + \pi \times 9 \times 15 = 216\pi \text{ cm}^2.$

L'essentiel de la leçon

Notion	Ce que je retiens
Deux droites	4 cas, dont non coplanaires
Deux plans sécants	se coupent selon une droite
Parallélisme de plans	deux droites sécantes parallèles
Orthogonalité	à deux droites sécantes du plan
Cube d'arête a	$a\sqrt{2}$ et $a\sqrt{3}$