

TRONC COMMUN · LEÇON 13

Produit scalaire

Orthogonalité · Al-Kashi · Droites et cercles

Ce que nous allons apprendre

- Définir le produit scalaire
- Ses propriétés de calcul
- L'expression analytique
- Caractériser l'orthogonalité
- Les applications dans le triangle
- Vecteur normal et équation d'un cercle

Le même nombre, trois écritures

Donnée	Formule
Coordonnées (orthonormé)	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
Normes et angle	$\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos \theta$
Projection	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$
Carré scalaire	$\vec{u} \cdot \vec{u} = \ \vec{u}\ ^2$

ATTENTION

Le produit scalaire est un **nombre réel**, pas un vecteur.

Calculer comme avec des nombres

RÈGLES

Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$. · Linéarité : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

IDENTITÉS

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Le critère essentiel

THÉORÈME

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$	Angle
> 0	aigu
$= 0$	droit
< 0	obtus

Nature d'un angle

Énoncé. $A(1; 2)$, $B(5; 4)$, $C(3; 8)$. Nature de $\widehat{BAC}$?

- 1 $\vec{AB}(4; 2)$ et $\vec{AC}(2; 6)$.
- 2 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8 + 12 = 20 > 0$.
- 3 L'angle est **aigu**.

La formule du cosinus

FORMULE

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Suite de l'exemple. $AB = 2\sqrt{5}$ et $AC = 2\sqrt{10}$.

$$\textcircled{1} \quad \cos \widehat{BAC} = \frac{20}{2\sqrt{5} \times 2\sqrt{10}} = \frac{20}{4\sqrt{50}}.$$

$$\textcircled{2} \quad = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ donc } \widehat{BAC} = 45^\circ.$$

Pythagore généralisé

THÉORÈME

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Exemple. $AB = 7$, $AC = 5$, $\hat{A} = 60^\circ$.

- 1 $BC^2 = 49 + 25 - 2 \times 7 \times 5 \times \frac{1}{2}$.
- 2 $BC^2 = 74 - 35 = 39$, donc $BC = \sqrt{39} \approx 6,24$.

Une droite autrement

DÉFINITION

$\vec{n}$ est **normal** à (D) s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de (D) .

ÉQUATION

Droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

Exemple. $A(2; 3)$, $\vec{n}(4; -1)$ donnent $4x - y - 5 = 0$.

Deux formes d'équation

FORME RÉDUITE

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Exemple. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

- ➊ Je complète les carrés : $(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 12 = 0$.
- ➋ $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.
- ➌ Centre $\Omega(3 ; -2)$ et rayon 5.

APPLICATION 1

Cercle de diamètre $[AB]$

Énoncé. $A(1 ; 1)$ et $B(7 ; 9)$.

- ➊ Le centre est le milieu $\Omega(4 ; 5)$.
- ➋ $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$, donc $R = 5$.
- ➌ Équation : $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$. On peut aussi écrire $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

APPLICATION 2

Un triangle obtus

Énoncé. $AB = 8$, $AC = 6$, $\hat{A} = 120^\circ$. Calculer BC .

1 $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$

2 $BC^2 = 64 + 36 + 48 = 148.$

3 $BC = 2\sqrt{37} \approx 12,2.$

L'essentiel de la leçon

Objectif	Formule
Calculer	$xx' + yy'$
Orthogonalité	produit scalaire nul
Angle	$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ }$
Côté d'un triangle	Al-Kashi
Cercle	compléter les carrés