

TRONC COMMUN · LEÇON 12

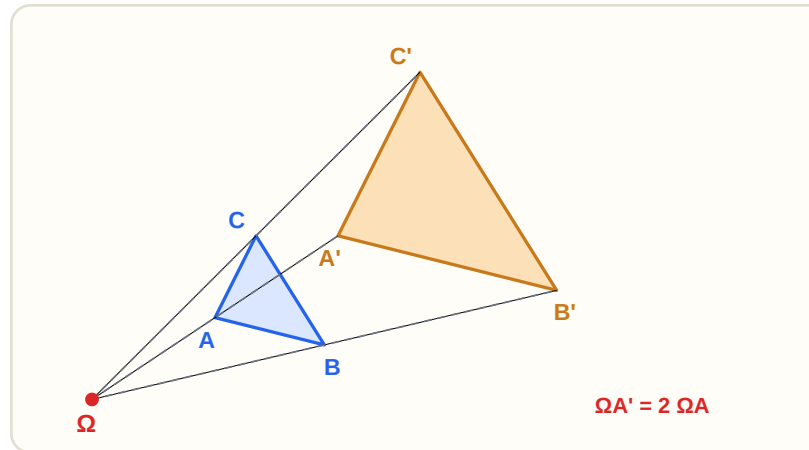
Transformations du plan

Translation · Symétries · Rotation · Homothétie

Ce que nous allons apprendre

- Les quatre transformations usuelles
- La propriété caractéristique de chacune
- Ce qui est conservé
- L'homothétie et son rapport k
- Les images de figures
- Les composées simples

Une caractérisation chacune



Transformation	Caractérisation
Translation de vecteur $\vec{u}$	$\vec{MM'} = \vec{u}$
Symétrie centrale de centre O	O milieu de $[MM']$
Symétrie axiale d'axe (D)	(D) médiatrice de $[MM']$
Homothétie de centre I , rapport k	$I\vec{M'} = k I\vec{M}$

Celles qui ne déforment pas

DÉFINITION

Une **isométrie** conserve les distances. Translation, symétries et rotation en sont.

CONSÉQUENCES

Elles conservent les **longueurs**, les **angles**, les **aires**, l'alignement et le parallélisme : la figure image est superposable.

ROTATION

La rotation de centre O et d'angle α vérifie $OM' = OM$ et $(\widehat{OM;OM'}) = \alpha$.

Un agrandissement ou une réduction

Grandeur	Multipliée par
Longueurs	$ k $
Aires	k^2
Angles	inchangés

SENS

$k > 0$: l'image est du **même côté** du centre. $k < 0$: elle est de l'autre côté.

Les formules à appliquer

Transformation	Image de $M(x; y)$
Translation de $\vec{u}(a; b)$	$(x + a; y + b)$
Symétrie de centre O	$(-x; -y)$
Symétrie d'axe (Ox)	$(x; -y)$
Symétrie d'axe (Oy)	$(-x; y)$
Homothétie de centre O , rapport k	$(kx; ky)$

Passer par les vecteurs

Exemple. Homothétie de centre $I(1; 2)$, rapport $k = -2$, image de $A(4; 3)$

1 $\vec{IA}(3; 1).$

2 $I\vec{A}' = -2\vec{IA} = (-6; -2).$

3 $A'(1 - 6; 2 - 2) = (-5; 0).$

Ce que devient chaque objet

Objet	Image
Droite	droite (parallèle pour translation et homothétie)
Segment	segment de même longueur (isométrie)
Cercle de centre Ω , rayon R	cercle de centre Ω' , rayon $ k R$
Milieu	milieu de l'image

Deux résultats utiles

DEUX SYMÉTRIES CENTRALES

La composée des symétries de centres O_1 puis O_2 est la **translation** de vecteur $2\vec{O_1O_2}$.

DEUX SYMÉTRIES AXIALES D'AXES PARALLÈLES

La composée est aussi une **translation**, de vecteur perpendiculaire aux axes et de norme le double de leur distance.

MÉTHODE

Retrouver un antécédent

- 1 Translation de $\vec{u}$: je **retire** les coordonnées de $\vec{u}$.
- 2 Homothétie de rapport k : j'applique le rapport $\frac{1}{k}$ depuis le centre.
- 3 Symétrie : elle est sa propre réciproque, j'applique la même transformation.

APPLICATION 1

Aire et périmètre

Énoncé. Un rectangle d'aire 24 cm^2 et de périmètre 20 cm , image par une homothétie de rapport $2,5$.

- ➊ Aire : $\times k^2 = 6,25$, donc $24 \times 6,25 = 150 \text{ cm}^2$.
- ➋ Périmètre : $\times |k| = 2,5$, donc 50 cm .
- ➌ Les angles, eux, restent droits.

APPLICATION 2

Le centre de gravité

Énoncé. I est le milieu de $[BC]$ et $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI}$. Que représente G ?

- 1 G est l'image de I par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.
- 2 C'est exactement la définition du **centre de gravité** du triangle.
- 3 Il est situé aux deux tiers de la médiane depuis le sommet.

L'essentiel de la leçon

Transformation	Effet
Translation	$\vec{MM'} = \vec{u}$, isométrie
Symétrie centrale	$(-x; -y)$ si centre O
Rotation	isométrie, conserve les angles
Homothétie	longueurs $\times k $, aires $\times k^2$
Deux symétries centrales	une translation