



Arithmétique dans $\mathbb{N}$ — Exercices d'approfondissement

Tronc commun · Arithmétique dans $\mathbb{N}$

Série 2 — divisibilité, nombres premiers, PGCD et PPCM.

Exercice 1

Décomposer en produit de facteurs premiers : 360, 1 176 et 2 025.

Correction

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 ; 1\,176 = 2^3 \times 3 \times 7^2 ; 2\,025 = 3^4 \times 5^2.$$

Exercice 2

Déterminer le PGCD et le PPCM de 84 et 120, d'abord par décomposition puis par l'algorithme d'Euclide.

Correction

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, donc $\text{PGCD} = 2^2 \times 3 = 12$ et
 $\text{PPCM} = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840$. Euclide : $120 = 1 \times 84 + 36$; $84 = 2 \times 36 + 12$;
 $36 = 3 \times 12 + 0$: le dernier reste non nul est 12.

Exercice 3

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n^2 + n$ est divisible par 2.

Correction

$n^2 + n = n(n + 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs : l'un des deux est pair, donc le produit est divisible par 2.

Exercice 4

Un fleuriste dispose de 120 roses et de 180 tulipes. Il veut composer le plus grand nombre possible de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs.

1. Combien de bouquets peut-il faire ?
2. Quelle est la composition de chaque bouquet ?

Correction

1. $\text{PGCD}(120 ; 180) = 60$: il peut faire 60 bouquets.
2. Chaque bouquet contient 2 roses et 3 tulipes.

Exercice 5

Deux phares s'allument respectivement toutes les 18 secondes et toutes les 24 secondes. Ils s'allument ensemble à midi pile. À quelle heure s'allumeront-ils de nouveau ensemble ?

Correction

$\text{PPCM}(18; 24) = 72$ secondes, soit 1 min 12 s : à 12 h 01 min 12 s.

Exercice 6

1. Montrer que $\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = a \times b$ sur l'exemple $a = 84$ et $b = 120$.
2. Le PGCD de deux nombres est 14 et leur PPCM est 420. Quel est leur produit ?

Correction

1. $12 \times 840 = 10\,080$ et $84 \times 120 = 10\,080$: l'égalité est vérifiée.
2. $14 \times 420 = 5\,880$.

Exercice 7

Montrer que 221 n'est pas premier, puis déterminer tous ses diviseurs.

Correction

$221 = 13 \times 17$, donc il n'est pas premier. Ses diviseurs sont 1, 13, 17 et 221.