

TRONC COMMUN · LEÇON 11

Fonctions de référence

Affine · Carré · Cube · Racine · Inverse

Ce que nous allons apprendre

- Les six fonctions de référence
- Leurs domaines et leurs variations
- Leurs courbes et leurs symétries
- La fonction homographique
- Comparer x , x^2 et $\sqrt{x}$
- Résoudre graphiquement

Les six fonctions

Fonction	Domaine	Variations
$ax + b$	$\mathbb{R}$	selon le signe de a
x^2	$\mathbb{R}$	décroît puis croît
x^3	$\mathbb{R}$	croissante
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	croissante
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	décroît sur chaque intervalle
$ x $	$\mathbb{R}$	décroît puis croît

Reconnaître d'un coup d'œil

Fonction	Courbe	Parité
$ax + b$	droite	impaire si $b = 0$
x^2	parabole	paire
x^3	cubique	impaire
$\sqrt{x}$	demi-parabole	ni l'une ni l'autre
$\frac{1}{x}$	hyperbole	impaire
$ x $	deux demi-droites	paire

Démontrer sa décroissance

Énoncé. Montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ décroît sur $]0; +\infty[$.

1 Pour $0 < a < b$: $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab}$.

2 $T = \frac{a - b}{ab(b - a)} = \frac{-1}{ab}$.

3 $ab > 0$ donc $T < 0$: f est strictement décroissante.

Une hyperbole déplacée

FORME

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0) \longrightarrow \alpha + \frac{\beta}{cx + d}$$

Exemple. $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$.

❶ $\frac{2(x - 1) + 3}{x - 1} = 2 + \frac{3}{x - 1}$.

❷ Asymptote verticale $x = 1$, asymptote horizontale $y = 2$.

L'ordre change en 1

Sur l'intervalle	Ordre
$]0 ; 1[$	$x^2 < x < \sqrt{x}$
$x = 1$	les trois valent 1
$]1 ; +\infty[$	$\sqrt{x} < x < x^2$

DÉMONSTRATION

$\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$: le signe dépend de la position de $\sqrt{x}$ par rapport à 1.

Deux morceaux de droite

ÉCRITURE

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

COURBE

Deux demi-droites formant un « V » de sommet O : la fonction est **paire**, décroissante puis croissante.

LIEN

$\sqrt{x^2} = |x|$, et non x .

MÉTHODE

Résoudre graphiquement

- 1 Je trace les deux courbes dans le même repère.
- 2 Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les **abscisses** des points d'intersection.
- 3 Pour $f(x) > g(x)$, je lis les intervalles où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus.

CONTRÔLE

Je confirme toujours la lecture graphique par un calcul.

APPLICATION 1

Deux courbes qui se croisent

Énoncé. Résoudre $x^2 = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- 1 On multiplie par $x > 0$: $x^3 = 1$.
- 2 $x = 1$.
- 3 Les deux courbes se coupent au point $(1; 1)$.

APPLICATION 2

Parabole et droite

Énoncé. Position relative de $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$.

- 1 $f(x) - g(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$.
- 2 Négatif sur $]0 ; 2[$, positif ailleurs.
- 3 La parabole est en dessous entre 0 et 2 ; elles se coupent en $(0 ; 0)$ et $(2 ; 4)$.

L'essentiel de la leçon

Fonction	Point clé
x^2	paire, minimum en 0
x^3	impaire, croissante
$\sqrt{x}$	définie pour $x \geq 0$
$\frac{1}{x}$	impaire, décroît sur chaque intervalle
Homographique	deux asymptotes