

TRONC COMMUN · LEÇON 10

Généralités sur les fonctions

Domaine · Parité · Variations · Extremums

Ce que nous allons apprendre

- Déterminer un domaine de définition
- Étudier la parité d'une fonction
- Le taux de variation et le sens de variation
- Les extremums
- Comparer deux fonctions
- Les fonctions associées

Trois conditions à repérer

Forme	Condition	Exemple
$\frac{A}{B}$	$B \neq 0$	$\frac{1}{x-3} : x \neq 3$
$\sqrt{A}$	$A \geq 0$	$\sqrt{x+4} : x \geq -4$
$\frac{1}{\sqrt{A}}$	$A > 0$	$\frac{1}{\sqrt{5-x}} : x < 5$

RÉDACTION

J'écris la condition, je résous, puis je donne D_f sous forme d'intervalle ou de réunion.

Deux symétries

Condition	Nature	Symétrie de la courbe
$f(-x) = f(x)$	paire	axe des ordonnées
$f(-x) = -f(x)$	impaire	origine du repère

ÉTAPE PRÉALABLE

Le domaine doit être **symétrique** par rapport à 0 : sinon la question ne se pose pas.

Exemples. $x^4 - 3x^2$ est paire ; $x^3 + x$ est impaire ; $x^2 + x$ n'est ni l'une ni l'autre.

L'outil de base

DÉFINITION

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (a \neq b)$$

Signe de T	Sur l'intervalle, f est...
$T > 0$	croissante
$T < 0$	décroissante
$T = 0$	constante

Démontrer une variation

Énoncé. Montrer que $f(x) = 3x - 5$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

- ➊ $f(b) - f(a) = 3b - 5 - (3a - 5) = 3(b - a).$
- ➋ $T = \frac{3(b - a)}{b - a} = 3.$
- ➌ $T = 3 > 0$: la fonction est strictement croissante.

Maximum et minimum

DÉFINITIONS

f admet un **maximum** en a si $f(x) \leq f(a)$ pour tout x du domaine ; un **minimum** si $f(x) \geq f(a)$.

AVEC LA FORME CANONIQUE

$f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$: minimum -3 atteint en $x = 2$.

VOCABULAIRE

L'extremum est la **valeur** $f(a)$; a est l'abscisse où il est atteint.

Le signe de la différence

MÉTHODE

J'étudie le signe de $f(x) - g(x)$: positif $\Rightarrow \mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$; négatif $\Rightarrow$ en dessous ; nul $\Rightarrow$ point d'intersection.

Exemple. $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ sur $[0 ; +\infty[$.

- ❶ $f(x) - g(x) = x(x - 1)$.
- ❷ Négatif sur $]0 ; 1[$, positif sur $]1 ; +\infty[$: les courbes se coupent en 0 et 1.

Lire une transformation

Fonction	Transformation de $\mathcal{C}_f$
$f(x) + b$	translation verticale de b
$f(x - a)$	translation horizontale de a
$f(x - a) + b$	translation de vecteur $\vec{u}(a; b)$
$-f(x)$	symétrie par rapport à l'axe des abscisses

APPLICATION 1

Une étude complète

Énoncé. Soit $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

- ➊ Forme canonique : $f(x) = -(x - 3)^2 + 4$.
- ➋ $a < 0$: f croît sur $] -\infty ; 3]$ puis décroît.
- ➌ Le **maximum** vaut 4, atteint en $x = 3$.

APPLICATION 2

Lire un tableau de variations

Énoncé. f décroît de 5 à -2 sur $[-3 ; 1]$, puis croît de -2 à 6 sur $[1 ; 4]$.

- 1 Minimum -2 en $x = 1$; maximum 6 en $x = 4$.
- 2 Sur chaque branche, f change de signe une fois.
- 3 L'équation $f(x) = 0$ admet donc **deux** solutions.

L'essentiel de la leçon

Objectif	Outil
Domaine	dénominateur $\neq 0$, racine ≥ 0
Parité	comparer $f(-x)$ à $f(x)$
Variations	taux de variation ou forme canonique
Extremum	sommet de la parabole
Position relative	signe de $f(x) - g(x)$