

TRONC COMMUN · LEÇON 9

Trigonométrie

Radian · Cercle trigonométrique · Angles associés

Ce que nous allons apprendre

- Le radian et les conversions
- Le cercle trigonométrique
- Cosinus, sinus et tangente d'un réel
- Les valeurs remarquables
- Les angles associés
- Les équations trigonométriques simples

Une autre unité d'angle

CONVERSION

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \quad \implies \quad \alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\text{deg}} \times \frac{\pi}{180}$$

Degrés	30°	45°	60°	90°	180°
Radians	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Deux formules simples

AVEC α EN RADIANS

$$\ell = R\alpha$$

$$\mathcal{A} = \frac{R^2\alpha}{2}$$

Exemple. $R = 6$ cm et $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

❶ $\ell = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi \approx 6,28$ cm.

❷ $\mathcal{A} = \frac{36 \times \frac{\pi}{3}}{2} = 6\pi \approx 18,8$ cm².

Lire cos et sin

DÉFINITION

Sur le cercle de rayon 1, au réel x correspond un point M : $\cos x$ est son **abscisse** et $\sin x$ son **ordonnée**.

CONSÉQUENCES IMMÉDIATES

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \cdot \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad \cdot \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

PÉRIODICITÉ

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

3 · VALEURS REMARQUABLES

À connaître par cœur

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

4 • ANGLES ASSOCIÉS

Le tableau complet

Angle	cos	sin
$-x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\pi - x$	$-\cos x$	$\sin x$
$\pi + x$	$-\cos x$	$-\sin x$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{\pi}{2} + x$	$-\sin x$	$\cos x$

Simplifier une expression

Exemple. $A = \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

❶ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\cos(\pi + x) = -\cos x.$

❷ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$

❸ $A = -\cos x - \cos x + \cos x = -\cos x.$

Retrouver une valeur

FORMULES

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Exemple. $\cos x = \frac{3}{5}$ avec $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.

1 $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$

2 Le quadrant impose $\sin x > 0$: $\sin x = \frac{4}{5}$ et $\tan x = \frac{4}{3}.$

Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$

MÉTHODE

Je place la valeur sur le cercle et je lis **toutes** les positions possibles : il y en a généralement **deux**.

Équation	Solutions sur $[0 ; 2\pi[$
$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$
$\sin x = -\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$
$\cos x = -1$	π seulement

APPLICATION 1

Un calcul complet

Énoncé. $\sin x = \frac{5}{13}$ et $x \in \left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$. Calculer $\cos x$ et $\tan x$.

1 $\cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$.

2 x est dans le premier quadrant : $\cos x = \frac{12}{13}$.

3 $\tan x = \frac{5}{12}$.

APPLICATION 2

Une identité à prouver

Énoncé. Montrer que $\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x} = \sin x$ lorsque $\sin x \neq 0$.

- 1 $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.
- 2 Le quotient vaut $\frac{\sin^2 x}{\sin x}$.
- 3 Après simplification : $\sin x$.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Conversion	$180^\circ = \pi \text{ rad}$
Arc et secteur	$\ell = R\alpha$ et $\mathcal{A} = \frac{R^2\alpha}{2}$
Relation fondamentale	$\cos^2 + \sin^2 = 1$
$\pi - x$	$-\cos x$ et $\sin x$
Équation	en général deux solutions