

TRONC COMMUN · LEÇON 7

Polynômes et trinôme du second degré

Discriminant · Factorisation · Signe

Ce que nous allons apprendre

- Polynômes, degré et racine
- Factoriser à partir d'une racine évidente
- Le discriminant et les racines du trinôme
- La forme canonique et l'extremum
- Le signe du trinôme
- Somme et produit des racines

Racine et factorisation

THÉORÈME

α est une racine de $P \iff P(\alpha) = 0 \iff P(x) = (x - \alpha) Q(x)$, où $\deg Q = \deg P - 1$.

Exemple. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ et $P(1) = 0$.

- ➊ $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$.
- ➋ $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, d'où $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$.

Trois cas, trois conclusions

POUR $ax^2 + bx + c$ AVEC $a \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Δ	Racines	Factorisation
> 0	$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$
$= 0$	$\frac{-b}{2a}$ (double)	$a(x - x_0)^2$
< 0	aucune dans $\mathbb{R}$	impossible dans $\mathbb{R}$

Résoudre et factoriser

Énoncé. $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

- ➊ $\Delta = 49 - 24 = 25$, donc $\sqrt{\Delta} = 5$.
- ➋ $x_1 = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{7 + 5}{4} = 3$.
- ➌ $2x^2 - 7x + 3 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 3)$.

Lire l'extremum

FORMULE

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

INTERPRÉTATION

Le sommet de la parabole est au point d'abscisse $-\frac{b}{2a}$. Si $a > 0$, c'est un **minimum** ; si $a < 0$, un **maximum**.

Exemple. $x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$: minimum -4 atteint en $x = 3$.

La règle d'or

ÉNONCÉ

Le trinôme est du **signe de a** partout, **sauf entre les racines** où il est du signe de $-a$ (uniquement si $\Delta > 0$).

Cas	Signe
$\Delta < 0$	signe de a sur tout $\mathbb{R}$
$\Delta = 0$	signe de a , nul en x_0
$\Delta > 0$	signe de a à l'extérieur, de $-a$ entre

Une résolution type

Énoncé. Résoudre $-2x^2 + 3x + 2 > 0$.

- 1 $\Delta = 9 + 16 = 25$.
- 2 Racines : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 2$.
- 3 $a = -2 < 0$: le trinôme est positif **entre** les racines, soit $S = \left] -\frac{1}{2} ; 2 \right[$.

Deux relations précieuses

FORMULES

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

PROBLÈME INVERSE

Deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de $x^2 - Sx + P = 0$.

Exemple. Somme 11, produit 30 : $x^2 - 11x + 30 = 0$ donne 5 et 6.

Faire varier un paramètre

Énoncé. Discuter le nombre de solutions de $x^2 - 4x + m = 0$.

- 1 $\Delta = 16 - 4m$.
- 2 $m < 4$: deux solutions ; $m = 4$: une solution double $x = 2$.
- 3 $m > 4$: aucune solution réelle.

APPLICATION 1

Un problème d'aire

Énoncé. Un rectangle a un périmètre de 26 m et une aire de 40 m².

- 1 Somme des dimensions : 13 ; produit : 40.
- 2 Elles sont racines de $x^2 - 13x + 40 = 0$, avec $\Delta = 9$.
- 3 $x = 5$ ou $x = 8$: largeur 5 m, longueur 8 m.

APPLICATION 2

Un degré 3 complet

Énoncé. Factoriser $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

- ➊ Racine évidente : $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$.
- ➋ $P(x) = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$.
- ➌ $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$
Racines	$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation	$a(x - x_1)(x - x_2)$
Signe	celui de a sauf entre les racines
Somme / produit	$-\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$
Sommet	$x = -\frac{b}{2a}$