



Fonctions de référence — Exercices d'approfondissement

Tronc commun · Fonctions de référence

Série 2 — variations, courbes et fonction homographique.

Exercice 1

Donner le sens de variation et la courbe de chacune des fonctions suivantes : $f(x) = -3x + 2$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$.

Correction

f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$ (droite de coefficient -3). g est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$ (parabole de sommet O). h est croissante sur $[0 ; +\infty[$ (demi-parabole).

Exercice 2

Étudier les variations de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ à l'aide du taux de variation.

Correction

Pour $0 < a < b$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{a - b}{ab(b - a)} = \frac{-1}{ab} < 0$. La fonction est donc **strictement décroissante** sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 3

Soit $f(x) = x^3$. Montrer que f est impaire et donner son sens de variation.

Correction

$f(-x) = -x^3 = -f(x)$: f est **impair**, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine. Pour $a < b$, $b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2) > 0$: f est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition.
2. Écrire $f(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x - 1}$.
3. En déduire les asymptotes de la courbe.

Correction

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$.
3. La droite $x = 1$ est asymptote verticale et la droite $y = 2$ est asymptote horizontale.

Exercice 5

Comparer $\sqrt{x}$ et x sur $]0; +\infty[$.

Correction

$\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$: positif sur $]0; 1[$ et négatif sur $]1; +\infty[$. Donc $\sqrt{x} > x$ sur $]0; 1[$, $\sqrt{x} < x$ sur $]1; +\infty[$, et égalité en 0 et 1.

Exercice 6

Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation $x^2 = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Correction

$x^2 = \frac{1}{x}$ équivaut à $x^3 = 1$, donc $x = 1$: les courbes de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ se coupent au point $(1; 1)$.

Exercice 7

Soit $f(x) = |x|$.

1. Écrire f sans valeur absolue.
2. Donner son sens de variation et préciser sa parité.

Correction

1. $f(x) = x$ si $x \geq 0$ et $f(x) = -x$ si $x < 0$.
2. Décroissante sur $] -\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$; la fonction est **paire**.