

TRONC COMMUN · LEÇON 6

Droites dans le plan

Vecteur directeur · Équations · Positions relatives

Ce que nous allons apprendre

- Le vecteur directeur d'une droite
- La représentation paramétrique
- L'équation cartésienne
- L'équation réduite
- Les positions relatives de deux droites
- Calculer un point d'intersection

La direction de la droite

DÉFINITION

$\vec{u} \neq \vec{0}$ est un **vecteur directeur** de (D) si, pour deux points A et B de (D) , $\vec{AB}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Donnée	Vecteur directeur
Deux points A et B	$\vec{AB}$
$ax + by + c = 0$	$\vec{u}(-b; a)$
$y = mx + p$	$\vec{u}(1; m)$

Décrire les points un à un

FORME

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

avec $A(x_A ; y_A)$ un point de la droite et $\vec{u}(\alpha ; \beta)$ un vecteur directeur.

Exemple. $A(-2 ; 5)$ et $\vec{u}(1 ; -3)$ donnent $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$.

Construire l'équation

PRINCIPE

$M(x; y)$ appartient à $(D) \iff \det(\vec{AM}; \vec{u}) = 0$.

Exemple. $A(2; -1)$ et $\vec{u}(3; 4)$.

- 1 $\vec{AM}(x - 2; y + 1)$.
- 2 $\det = 4(x - 2) - 3(y + 1) = 0$.
- 3 $4x - 3y - 11 = 0$.

Passer de l'une à l'autre

Forme	Écriture	Remarque
Cartésienne	$ax + by + c = 0$	toujours possible
Réduite	$y = mx + p$	sauf droite verticale
Verticale	$x = k$	pas de coefficient directeur

EXEMPLE

$2x - 3y + 6 = 0$ donne $y = \frac{2}{3}x + 2$: coefficient directeur $\frac{2}{3}$, ordonnée à l'origine 2.

Un seul test

Résultat	Conclusion
$\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0$	droites sécantes
$\det = 0$ et un point commun	droites confondues
$\det = 0$ et aucun point commun	strictement parallèles

MÉTHODE

Je compare les vecteurs directeurs, puis — si le déterminant est nul — je teste **un point** de la première dans la seconde.

Parallèles ou confondues ?

Énoncé. $(D) : 3x - 2y + 1 = 0$ et $(D') : -6x + 4y + 5 = 0$.

- ➊ $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(-4; -6) : \det = -12 + 12 = 0$.
- ➋ Le point $(0; 0,5)$ est sur (D) .
- ➌ $-6 \times 0 + 4 \times 0,5 + 5 = 7 \neq 0$: elles sont **strictement parallèles**.

Un système à résoudre

Énoncé. $(D) : x + 2y - 7 = 0$ et $(D') : 3x - y - 7 = 0$.

- ➊ De la seconde : $y = 3x - 7$.
- ➋ $x + 2(3x - 7) - 7 = 0$, donc $7x = 21$ et $x = 3$.
- ➌ $y = 2$: le point d'intersection est $(3; 2)$.

MÉTHODE

Les réflexes de l'exercice

On me donne...	Je commence par...
deux points	calculer $\vec{AB}$
une équation cartésienne	lire $\vec{u}(-b; a)$
un point et une parallèle	reprendre le même vecteur directeur
deux équations	comparer les déterminants

APPLICATION 1

Déterminer un paramètre

Énoncé. Pour quel m les droites $mx + 3y - 1 = 0$ et $2x + (m + 1)y + 4 = 0$ sont-elles parallèles ?

- ➊ $\vec{u}(-3; m)$ et $\vec{v}(-(m + 1); 2)$.
- ➋ $\det = -6 + m(m + 1) = m^2 + m - 6$.
- ➌ $m^2 + m - 6 = 0$ donne $m = 2$ ou $m = -3$.

APPLICATION 2

La droite par deux points

Énoncé. $A(1 ; 3)$ et $B(5 ; -1)$. Donner l'équation cartésienne puis réduite de (AB) .

- ➊ $\vec{AB}(4 ; -4)$, donc $\vec{u}(1 ; -1)$ convient.
- ➋ $\det(\vec{AM} ; \vec{u}) = -1(x - 1) - 1(y - 3) = 0$.
- ➌ $x + y - 4 = 0$, soit $y = -x + 4$.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Vecteur directeur	$\vec{u}(-b; a)$ pour $ax + by + c = 0$
Cartésienne	$\det(A\vec{M}; \vec{u}) = 0$
Paramétrique	$x = x_A + \alpha t, y = y_A + \beta t$
Parallèles	$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$
Intersection	résoudre le système