

TRONC COMMUN · LEÇON 5

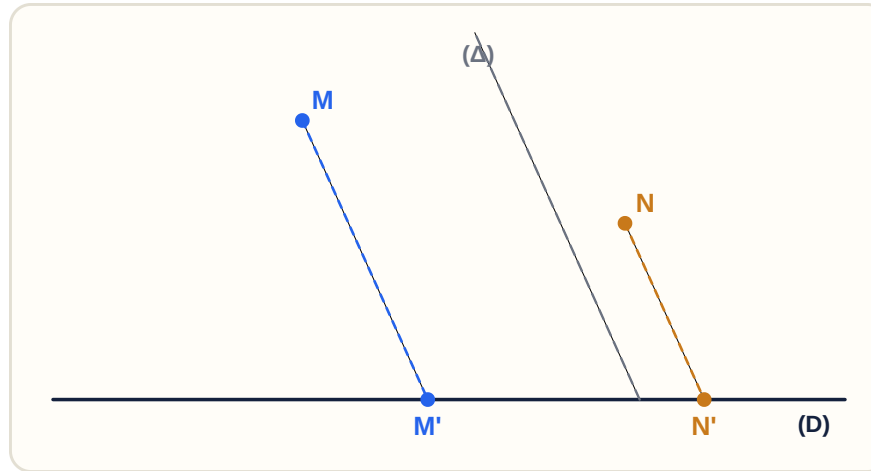
Projection dans le plan

Définition · Conservations · Lien avec Thalès

Ce que nous allons apprendre

- Définir la projection sur une droite
- Construire l'image d'un point et d'une figure
- La conservation de l'alignement et du milieu
- La conservation du rapport de deux vecteurs
- Ce qui n'est pas conservé
- Le lien avec le théorème de Thalès

Deux droites sécantes



DÉFINITION

Le projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ) est le point d'intersection de (D) avec la parallèle à (Δ) passant par M .

Trois remarques utiles

POINTS FIXES

Tout point de (D) est son **propre** projeté.

NON INJECTIVITÉ

Deux points distincts d'une même parallèle à (Δ) ont la **même** image.

CONDITION

(D) et (Δ) doivent être **sécantes** : sinon la projection n'a pas de sens.

Ce que la projection garde

Propriété	Conservée ?
Alignement	oui
Milieu d'un segment	oui
Rapport de vecteurs colinéaires	oui
Longueurs	non
Angles	non

CONTRE-EXEMPLE

Un segment oblique devient plus court une fois projeté ; un angle droit peut devenir plat.

Une démonstration courte

Énoncé. I est le milieu de $[AB]$. Montrer que I' est le milieu de $[A'B']$.

- 1 $\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB}$.
- 2 La projection conserve le rapport de deux vecteurs colinéaires.
- 3 Donc $\vec{A'I'} = \frac{1}{2} \vec{A'B'}$: I' est bien le milieu.

La propriété la plus utile

ÉNONCÉ

$$\vec{AM} = k \vec{AB} \implies A'\vec{M}' = k A'\vec{B}'$$

LECTURE

Le coefficient k est **inchangé** : c'est ce qui permet de transporter un rapport d'une droite à une autre.

Exemple. Si $\vec{AM} = \frac{3}{4} \vec{AB}$, alors $A'\vec{M}' = \frac{3}{4} A'\vec{B}'$.

Une même configuration

THÉORÈME DE THALÈS

Dans un triangle ABC , si (MN) est parallèle à (BC) avec $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

LIEN

N est exactement le **projeté** de M sur (AC) parallèlement à (BC) : la conservation du rapport, c'est Thalès.

Construire l'image d'une figure

- 1 Je trace, par chaque sommet, la parallèle à (Δ) .
- 2 Je marque les intersections avec (D) .
- 3 Je relie les images dans le même ordre.

VÉRIFICATION

Si un point était un milieu, son image doit rester un milieu.

APPLICATION 1

Calculer une longueur

Énoncé. $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$, (MN) parallèle à (BC) et $BC = 15$ cm.

1 N est le projeté de M sur (AC) parallèlement à (BC) .

2 Le rapport est conservé : $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{5}$.

3 $MN = \frac{2}{5} \times 15 = 6$ cm.

APPLICATION 2

Le parallélogramme

Énoncé. $ABCD$ est un parallélogramme de centre O . On projette sur (AB) parallèlement à (AD) .

- 1 $A \mapsto A$ et $B \mapsto B$ (points de (AB)).
- 2 $D \mapsto A$ et $C \mapsto B$ (car (DA) et (CB) sont parallèles à (AD)).
- 3 O est le milieu de $[AC]$, donc son image est le milieu de $[AB]$.

L'essentiel de la leçon

Point clé	Ce que je retiens
Définition	intersection de (D) et de la parallèle à (Δ)
Conservé	alignement, milieu, rapport
Non conservé	longueurs, angles
Rapport	$\vec{AM} = k\vec{AB} \Rightarrow A'\vec{M}' = kA'\vec{B}'$
Lien	c'est la configuration de Thalès