

TRONC COMMUN · LEÇON 4

Vecteurs, coordonnées et colinéarité

Opérations · Déterminant · Alignement

Ce que nous allons apprendre

- Les opérations sur les vecteurs
- La colinéarité
- Les coordonnées dans un repère
- Le déterminant de deux vecteurs
- Alignement et parallélisme
- Décomposer un vecteur dans une base

Somme et produit par un réel

CHASLES

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

PRODUIT PAR UN RÉEL

$k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$, le **même sens** si $k > 0$, le sens **opposé** si $k < 0$, et pour norme $|k| \|\vec{u}\|$.

RÈGLES DE CALCUL

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} \quad \cdot \quad (k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}.$$

Trois formulations

DÉFINITION

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (avec $\vec{u} \neq \vec{0}$).

Je veux montrer...	J'écris...
A, B, C alignés	$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ colinéaires
$(AB) \parallel (CD)$	$\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ colinéaires

Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Objet	Coordonnées
$\vec{AB}$	$(x_B - x_A; y_B - y_A)$
$\vec{u} + \vec{v}$	$(x + x'; y + y')$
$k\vec{u}$	$(kx; ky)$
Milieu de $[AB]$	$(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$
$\ \vec{u}\ $ (orthonormé)	$\sqrt{x^2 + y^2}$

Le test de colinéarité

FORMULE

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

CRITÈRE

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff \det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

Exemple. $\vec{u}(3; -2)$ et $\vec{v}(-6; 4)$: $\det = 12 - 12 = 0$, donc $\vec{v} = -2\vec{u}$.

La méthode en trois lignes

Énoncé. $A(1; 2)$, $B(4; 8)$, $C(-1; -2)$ sont-ils alignés ?

- ➊ $\vec{AB}(3; 6)$ et $\vec{AC}(-2; -4)$.
- ➋ $\det = 3 \times (-4) - 6 \times (-2) = -12 + 12 = 0$.
- ➌ Les vecteurs sont colinéaires : les points sont **alignés**.

Une égalité de vecteurs

CRITÈRE

$ABCD$ est un parallélogramme $\iff \vec{AB} = \vec{DC} \iff [AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

Exemple. $A(0 ; 1)$, $B(3 ; 5)$, $C(5 ; 2)$, $D(2 ; -2)$.

- ❶ $\vec{AB}(3 ; 4)$ et $\vec{DC}(3 ; 4)$.
- ❷ Les vecteurs sont égaux : $ABCD$ est un parallélogramme.

Décomposer un vecteur

THÉORÈME

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont **pas colinéaires**, tout vecteur $\vec{w}$ s'écrit de façon unique $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Exemple. $\vec{u}(2; -1)$, $\vec{v}(1; 3)$, $\vec{w}(8; 3)$.

1
$$\begin{cases} 2a + b = 8 \\ -a + 3b = 3 \end{cases}$$

2 $a = 3$ et $b = 2$, donc $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

APPLICATION 1

Trouver un paramètre

Énoncé. Pour quelle(s) valeur(s) de m les vecteurs $\vec{u}(m; 3)$ et $\vec{v}(4; m - 1)$ sont-ils colinéaires ?

- ➊ $\det = m(m - 1) - 3 \times 4 = m^2 - m - 12.$
- ➋ $m^2 - m - 12 = 0$ donne $\Delta = 49.$
- ➌ $m = 4$ ou $m = -3.$

APPLICATION 2

Un point défini par un rapport

Énoncé. $A(2; 1)$ et $B(6; 9)$. Trouver M tel que $\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{AB}$.

❶ $\vec{AB}(4; 8)$.

❷ $\frac{3}{4}\vec{AB}(3; 6)$.

❸ $M(2 + 3; 1 + 6) = (5; 7)$.

L'essentiel de la leçon

Objectif	Outil
Coordonnées d'un vecteur	arrivée moins départ
Colinéarité	$\det = xy' - yx' = 0$
Alignement	$\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = 0$
Parallélogramme	$\vec{AB} = \vec{DC}$
Décomposition	système 2×2