

TRONC COMMUN · LEÇON 3

Arithmétique dans $\mathbb{N}$

Divisibilité · Nombres premiers · PGCD et PPCM

Ce que nous allons apprendre

- Multiples, diviseurs et division euclidienne
- Les critères de divisibilité
- Les nombres premiers et la décomposition
- Le PGCD et le PPCM
- L'algorithme d'Euclide
- Résoudre un problème concret

La définition de base

DÉFINITION

$b \mid a$ s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = kb$. On dit que b **divise** a , ou que a est un **multiple** de b .

DIVISION EUCLIDIENNE

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b$$

CONSÉQUENCE

b divise a si et seulement si le reste r est **nul**.

Reconnaître sans calculer

Divisible par	Critère
2	chiffre des unités pair
3	somme des chiffres divisible par 3
4	les deux derniers chiffres forment un multiple de 4
5	unités 0 ou 5
9	somme des chiffres divisible par 9
10	unités 0

Exactement deux diviseurs

DÉFINITION

Un entier $p \geq 2$ est **premier** s'il n'admet que 1 et p comme diviseurs. **1 n'est pas** premier ; 2 est le seul premier pair.

TEST

Pour savoir si n est premier, il suffit de tester les premiers $\leq \sqrt{n}$.

Exemple. 221 : on teste 2, 3, 5, 7, 11, 13 ; $221 = 13 \times 17$, donc **221 n'est pas** premier.

Un produit unique

THÉORÈME

Tout entier ≥ 2 s'écrit de manière **unique** comme produit de facteurs premiers.

EXEMPLES

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \quad 1\,176 = 2^3 \times 3 \times 7^2 \quad 2\,025 = 3^4 \times 5^2$$

MÉTHODE

Je divise successivement par 2, puis 3, puis 5, 7... jusqu'à obtenir 1.

Par la décomposition

Notion	Règle
PGCD	facteurs communs , plus petit exposant
PPCM	tous les facteurs, plus grand exposant

Exemple. $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.

- 1 PGCD = $2^2 \times 3 = 12$.
- 2 PPCM = $2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840$.

Des divisions successives

PRINCIPE

On divise, puis on remplace le dividende par le diviseur et le diviseur par le reste, jusqu'à un reste nul. Le PGCD est le **dernier reste non nul**.

Exemple. PGCD de 120 et 84.

- ❶ $120 = 1 \times 84 + 36.$
- ❷ $84 = 2 \times 36 + 12.$
- ❸ $36 = 3 \times 12 + 0$: le PGCD est 12.

PGCD × PPCM

FORMULE

$$\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = a \times b$$

VÉRIFICATION

Pour 84 et 120 : $12 \times 840 = 10\,080 = 84 \times 120$.

NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

a et b sont premiers entre eux si $\text{PGCD}(a; b) = 1$; alors $\text{PPCM} = ab$.

MÉTHODE

PGCD ou PPCM ?

L'énoncé dit...	J'utilise...
partager en parts identiques les plus grandes	PGCD
découper en carrés les plus grands	PGCD
se retrouver ensemble, coïncider	PPCM
plus petit nombre commun	PPCM

APPLICATION 1

Les bouquets du fleuriste

Énoncé. 120 roses et 180 tulipes, le plus grand nombre de bouquets identiques.

- 1 Il faut le **PGCD** : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.
- 2 $\text{PGCD} = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$ bouquets.
- 3 Chaque bouquet : 2 roses et 3 tulipes.

APPLICATION 2

Les deux phares

Énoncé. Deux phares s'allument toutes les 18 s et toutes les 24 s, ensemble à midi.

- 1 Il faut le **PPCM** : $18 = 2 \times 3^2$ et $24 = 2^3 \times 3$.
- 2 $\text{PPCM} = 2^3 \times 3^2 = 72$ secondes.
- 3 Ils se rallumeront ensemble à 12 h 01 min 12 s.

L'essentiel de la leçon

Notion	Ce que je retiens
Division euclidienne	$a = bq + r, 0 \leq r < b$
Premier	deux diviseurs ; tester jusqu'à $\sqrt{n}$
PGCD	communs, plus petit exposant
PPCM	tous, plus grand exposant
Euclide	dernier reste non nul
Relation	$\text{PGCD} \times \text{PPCM} = ab$