

TRONC COMMUN · LEÇON 2

Ensembles de nombres, intervalles et valeur absolue

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ · Intervalles · Encadrements

Ce que nous allons apprendre

- Les ensembles de nombres et leurs inclusions
- Les intervalles, réunion et intersection
- La valeur absolue et la distance
- Équations et inéquations avec valeur absolue
- Encadrement et approximation
- Calculs avec les radicaux

Une suite d'inclusions

Ensemble	Contenu	Exemple
$\mathbb{N}$	entiers naturels	0 ; 7
$\mathbb{Z}$	entiers relatifs	-5
$\mathbb{D}$	décimaux	2,75
$\mathbb{Q}$	rationnels $\frac{p}{q}$	$\frac{1}{3}$
$\mathbb{R}$	tous les réels	$\sqrt{2}$; π

IRRATIONNELS

Un réel qui n'est pas rationnel est **irrationnel** : son écriture décimale est infinie et non périodique.

Traduire une inégalité

Condition	Intervalle
$a \leq x \leq b$	$[a ; b]$
$a < x < b$	$]a ; b[$
$x \geq a$	$[a ; +\infty[$
$x < b$	$] - \infty ; b[$

RÈGLE

Du côté de l'infini, le crochet est **toujours ouvert**.

Intersection et réunion

Exemple. $A = [-2 ; 6[$ et $B =]3 ; 9]$.

- ❶ $A \cap B$: les réels dans les **deux** intervalles, soit $]3 ; 6[$.
- ❷ $A \cup B$: les réels dans **au moins un**, soit $[-2 ; 9]$.

ASTUCE

Toujours faire un **schéma sur une droite graduée** avant de conclure.

Une distance

DÉFINITION

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

INTERPRÉTATION

$|x|$ est la **distance** de x à 0 ; $|x - a|$ est la distance de x à a .

PROPRIÉTÉS

$$|x| \geq 0 \quad \cdot \quad |xy| = |x| |y| \quad \cdot \quad \sqrt{x^2} = |x|.$$

Trois formes à connaître

Écriture (avec $a \geq 0$)	Solution
$ x = a$	$x = a$ ou $x = -a$
$ x \leq a$	$-a \leq x \leq a$
$ x \geq a$	$x \leq -a$ ou $x \geq a$

EXEMPLE

$|2x - 5| = 7$ donne $2x - 5 = 7$ ou $2x - 5 = -7$, soit $x = 6$ ou $x = -1$.

Supprimer la valeur absolue

Exemple. Écrire $|x - 2| + |x + 1|$ sans valeur absolue.

- ➊ Si $x < -1$: $-(x - 2) - (x + 1) = -2x + 1$.
- ➋ Si $-1 \leq x < 2$: $-(x - 2) + (x + 1) = 3$.
- ➌ Si $x \geq 2$: $(x - 2) + (x + 1) = 2x - 1$.

Additionner, soustraire, multiplier

RÈGLES

On **additionne** les encadrements membre à membre. Pour une différence, on encadre d'abord l'**opposé**. Multiplier par un négatif **inverse** l'encadrement.

Exemple. $2 < x < 5$ et $-1 < y < 3$.

- ➊ $1 < x + y < 8$.
- ➋ $-3 < -y < 1$, donc $-1 < x - y < 6$.

Simplifier et rationaliser

RÈGLES

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \sqrt{a^2b} = a\sqrt{b} \ (a \geq 0) \quad \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Exemple. $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$.

1 Je multiplie par le **conjugué** $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

2
$$\frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}.$$

APPLICATION 1

Une inéquation à deux faces

Énoncé. Résoudre $|2x - 7| > 3$.

- 1** $2x - 7 > 3$ ou $2x - 7 < -3$.
- 2** $x > 5$ ou $x < 2$.
- 3** $S =] - \infty ; 2[\cup] 5 ; +\infty[$.

APPLICATION 2

Encadrer une expression

Énoncé. $1 < a < 4$ et $-2 < b < 1$. Encadrer $3a - 2b$.

- ➊ $3 < 3a < 12$.
- ➋ $-2 < b < 1$ donne $-2 < -2b < 4$.
- ➌ $1 < 3a - 2b < 16$.

L'essentiel de la leçon

Notion	Ce que je retiens
Inclusions	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Infini	crochet toujours ouvert
$ x - a $	distance de x à a
$ x \geq a$	une réunion d'intervalles
Différence	encadrer l'opposé d'abord
Rationaliser	multiplier par le conjugué