



Logique et raisonnement — Fiche de révision

Tronc commun · Logique et raisonnement

L'essentiel en une page

Connecteur	Vraie lorsque...
$\overline{P}$	P est fausse
P et Q	les deux sont vraies
P ou Q	au moins une est vraie
$P \Rightarrow Q$	sauf si P vraie et Q fausse
$P \Leftrightarrow Q$	P et Q ont la même valeur

Négation des quantificateurs : la négation de $(\forall x) P(x)$ est $(\exists x) \overline{P(x)}$; celle de $(\exists x) P(x)$ est $(\forall x) \overline{P(x)}$.

Lois de De Morgan : $\overline{P \text{ et } Q} = \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$; $\overline{P \text{ ou } Q} = \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$.

Raisonnement	Quand l'utiliser
Déduction directe	la conclusion s'enchaîne naturellement
Contraposée	on prouve $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
Absurde	on suppose le contraire et on arrive à une contradiction
Contre-exemple	pour montrer qu'un « pour tout » est faux
Disjonction des cas	pair ou impair, positif ou négatif...
Récurrence	une propriété portant sur tout $n \in \mathbb{N}$

Ce que je dois savoir faire

- Écrire la négation d'une proposition quantifiée, en inversant l'ordre des quantificateurs.
- Dresser une table de vérité et reconnaître une tautologie.
- Rédiger une démonstration par contraposée et par l'absurde.
- Réfuter une proposition par un contre-exemple.
- Rédiger une récurrence : initialisation, hérédité, conclusion.

Les pièges à éviter

- La négation de $x > 0$ est $x \leq 0$, pas $x < 0$.
- La négation de « pour tout » est « il existe », **pas** « pour tout... ne... pas ».
- $(\forall x)(\exists y)$ et $(\exists y)(\forall x)$ n'ont **pas** le même sens.
- Un exemple ne démontre pas un « pour tout » ; un contre-exemple suffit pour le réfuter.
- Dans une récurrence, l'hérédité seule ne suffit pas : l'initialisation est obligatoire.

Testez-vous en 3 minutes

Négation de $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 1)$? Contraposée de « si n est premier et $n > 2$ alors n est impair »
? La proposition $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 > 0)$ est-elle vraie ?

Réponses

$(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 < 1)$; « si n est pair alors n n'est pas premier ou $n \leq 2$ » ; fausse, contre-exemple $x = 0$.