



Logique et raisonnement — Exercices d'approfondissement

Tronc commun · Logique et raisonnement

Série 2 — négations, quantificateurs et démonstrations rédigées.

Exercice 1

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes.

1. $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 + 1 > 0)$
2. $(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 = 2)$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) (x + y = 0)$

Correction

1. $(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 + 1 \leq 0).$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 \neq 2).$
3. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) (x + y \neq 0).$

Exercice 2

Soient P et Q deux propositions. Montrer, à l'aide d'une table de vérité, que $P \Rightarrow Q$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ ont la même valeur de vérité.

Correction

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Les deux colonnes sont identiques : les propositions sont **équivalentes**. C'est le principe du raisonnement par **contraposée**.

Exercice 3

Montrer par contraposée que, pour tout entier naturel n , si n^2 est pair alors n est pair.

Correction

Contraposée : si n est impair alors n^2 est impair. Si $n = 2k + 1$, alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, qui est impair. La contraposée est vraie, donc l'implication de départ est vraie.

Exercice 4

Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Correction

Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls et la fraction **irréductible**. Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair (exercice 3) : $p = 2k$. Il vient $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$: q est pair lui aussi. p et q sont tous deux pairs, ce qui contredit l'irréductibilité. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 5

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Justifier par une démonstration ou un contre-exemple.

1. $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 \geq x)$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 + x + 1 > 0)$

Correction

1. **Fausse** : pour $x = 0,5$, on a $x^2 = 0,25 < 0,5$.
2. **Vraie** : $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$.

Exercice 6

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Correction

Initialisation. Pour $n = 1$: $1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1$. La propriété est vraie. **Hérédité.** Supposons la propriété vraie au rang n . Alors

$$1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \frac{n+2}{2}$$

ce qui est la formule au rang $n+1$. **Conclusion.** La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7

Démontrer par disjonction des cas que, pour tout entier n , le nombre $n(n+1)$ est pair.

Correction

Cas 1 : n est pair, $n = 2k$; alors $n(n+1) = 2k(n+1)$ est pair. **Cas 2** : n est impair, $n = 2k+1$; alors $n+1 = 2k+2$ est pair et $n(n+1) = n \times 2(k+1)$ est pair. Dans les deux cas, $n(n+1)$ est pair.