

TRONC COMMUN · LEÇON 1

Logique et raisonnement

Propositions · Quantificateurs · Types de raisonnement

Ce que nous allons apprendre

- Propositions et tables de vérité
- Les connecteurs logiques
- Les quantificateurs et leur négation
- Raisonnement par contraposée
- Raisonnement par l'absurde et contre-exemple
- Raisonnement par récurrence

Vrai ou faux, jamais les deux

DÉFINITION

Une **proposition** est un énoncé mathématique auquel on peut attribuer une valeur de vérité : **vraie** (V) ou **fausse** (F).

EXEMPLES

« $3 > 2$ » est une proposition vraie. « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » est une proposition fausse. « $x + 1 = 0$ » dépend de x : c'est un **prédicat**.

La table de vérité

P	Q	$P \text{ et } Q$	$P \text{ ou } Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

À RETENIR

Une implication n'est fausse que dans **un seul cas** : P vraie et Q fausse.

Les lois de De Morgan

NÉGATION D'UN « ET » ET D'UN « OU »

$$\overline{P \text{ et } Q} = \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$$

$$\overline{P \text{ ou } Q} = \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$$

NÉGATION D'UNE IMPLICATION

$\overline{P \Rightarrow Q}$ s'écrit « P **et** $\overline{Q}$ » : il n'y a pas d'implication dans la négation.

3 · QUANTIFICATEURS

« Pour tout » et « il existe »

Proposition	Sa négation
$(\forall x) P(x)$	$(\exists x) \overline{P(x)}$
$(\exists x) P(x)$	$(\forall x) \overline{P(x)}$
$(\forall x)(\exists y) P$	$(\exists x)(\forall y) \overline{P}$

RÈGLE

On **échange** chaque quantificateur et on nie la propriété, en gardant l'ordre.

Démontrer à l'envers

PRINCIPE

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

Exemple. Si n^2 est pair alors n est pair.

- ➊ Contraposée : si n est impair alors n^2 est impair.
- ➋ $n = 2k + 1$ donne $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, impair.
- ➌ La contraposée est vraie, donc l'implication aussi.

Supposer le contraire

Exemple célèbre. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

- ➊ Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, fraction **irréductible**.
- ➋ $p^2 = 2q^2$ donc p est pair : $p = 2k$.
- ➌ Alors $q^2 = 2k^2$ donc q est pair aussi : contradiction avec l'irréductibilité.

Un seul suffit

PRINCIPE

Pour montrer qu'une proposition « $(\forall x) P(x)$ » est **fausse**, il suffit d'exhiber **un** x tel que $P(x)$ soit fausse.

EXEMPLE

« $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 \geq x)$ » est fausse : pour $x = 0,5$, on a $0,25 < 0,5$.

ATTENTION

Un exemple ne **démontre** jamais un « pour tout » ; il ne sert qu'à le réfuter.

Trois étapes obligatoires

- ➊ **Initialisation** : la propriété est vraie au premier rang.
- ➋ **Hérédité** : si elle est vraie au rang n , alors elle l'est au rang $n + 1$.
- ➌ **Conclusion** : elle est vraie pour tout n .

ATTENTION

Sans initialisation, l'hérédité ne prouve rien.

APPLICATION 1

Une somme par récurrence

Énoncé. Montrer que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1 $n = 1 : \frac{1 \times 2}{2} = 1$. Vrai.

2 $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\frac{n+2}{2}$.

3 C'est la formule au rang $n+1$: la propriété est héréditaire.

Disjonction des cas

Énoncé. Montrer que $n(n + 1)$ est pair pour tout entier n .

- ➊ **Cas 1 :** $n = 2k$, alors $n(n + 1) = 2k(n + 1)$ est pair.
- ➋ **Cas 2 :** $n = 2k + 1$, alors $n + 1 = 2(k + 1)$ et le produit est pair.
- ➌ Dans les deux cas, $n(n + 1)$ est pair.

L'essentiel de la leçon

Situation	Outil
Nier « pour tout »	« il existe » + négation
Nier « P et Q »	$\overline{P}$ ou $\overline{Q}$
Implication difficile	contraposée
Énoncé d'existence nié	raisonnement par l'absurde
« Pour tout » à réfuter	contre-exemple
Propriété sur tout n	récurrence