



Espaces vectoriels réels — Fiche de révision

2ème Bac · Espaces vectoriels

L'essentiel en une page

Sous-espace vectoriel : $F \subset E$ est un sous-espace si $\vec{0} \in F$ et si $u + \lambda v \in F$ pour tous $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Notion	Définition
Combinaison linéaire	$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$
$\text{Vect}(u_1; \dots)$	l'ensemble de ces combinaisons
Famille génératrice	tout vecteur est une combinaison
Famille libre	$\sum \lambda_i u_i = \vec{0} \Rightarrow$ tous les λ_i nuls
Base	famille libre et génératrice
Dimension	le nombre de vecteurs d'une base

Critère pratique : dans un espace de dimension n , une famille **libre** de n vecteurs est une **base** (et de même pour une famille génératrice de n vecteurs).

Deux vecteurs sont liés si et seulement s'ils sont **colinéaires**.

Application linéaire : $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$. Alors $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Théorème du rang : $\dim \ker f + \dim \text{Im } f = \dim E$; f est injective si et seulement si $\ker f = \{\vec{0}\}$.

Ce que je dois savoir faire

- Montrer qu'un ensemble est (ou n'est pas) un sous-espace vectoriel.
- Extraire une base d'un ensemble défini par une équation.
- Tester si une famille est libre par un système.
- Calculer des coordonnées dans une base.
- Déterminer noyau, image et dimension d'une application linéaire.

Les pièges à éviter

- Un ensemble qui ne contient pas $\vec{0}$ n'est **jamais** un sous-espace.
- « Libre » se démontre par un système, pas par une impression.
- Un vecteur répété ou proportionnel ne compte pas dans la dimension.
- Ne pas confondre $\ker f$ (dans le départ) et $\text{Im } f$ (dans l'arrivée).

Testez-vous en 3 minutes

$\dim \mathbb{R}^3$? $\{(x; y); x = 2y\}$ est-il un sous-espace ? $\dim \text{Vect}\{(1; 1); (2; 2)\}$? f injective si

$\ker f = \{\vec{0}\}$?

Réponses

3 ; oui, de dimension 1 ; 1 ; oui.