



Espaces vectoriels réels — Exercices d'approfondissement

2ème Bac · Espaces vectoriels

Série 2 — sous-espaces, familles libres, bases et dimension.

Exercice 1

Montrer que $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis en donner une base et la dimension.

Correction

$(0; 0; 0) \in F$. Si u et v sont dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$, la somme des coordonnées de $u + \lambda v$ vaut $0 + \lambda \times 0 = 0$: F est un sous-espace vectoriel. $z = -x - y$ donne $(x; y; -x - y) = x(1; 0; -1) + y(0; 1; -1)$. Les deux vecteurs $(1; 0; -1)$ et $(0; 1; -1)$ sont non colinéaires : ils forment une **base** de F , donc $\dim F = 2$.

Exercice 2

La famille $(u(1; 1; 0); v(0; 1; 1); w(1; 0; 1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Correction

Soit $au + bv + cw = \vec{0}$:
$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$
 De la première, $c = -a$; de la deuxième, $b = -a$; la troisième donne $-2a = 0$, donc $a = b = c = 0$. La famille est **libre** ; comme elle a 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une **base**.

Exercice 3

Déterminer les coordonnées de $t(1; 2; 3)$ dans la base de l'exercice 2.

Correction

On résout $au + bv + cw = t$:
$$\begin{cases} a + c = 1 \\ a + b = 2 \\ b + c = 3 \end{cases}$$
 $a = 1 - c$, donc $b = 2 - a = 1 + c$, et la troisième ligne donne $1 + 2c = 3$, soit $c = 1$, $b = 2$, $a = 0$. Vérification : $2v + w = (0; 2; 2) + (1; 0; 1) = (1; 2; 3) \checkmark$. Les coordonnées sont $(0; 2; 1)$.

Exercice 4

L'ensemble $G = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel ?

Correction

$(0; 0; 0)$ ne vérifie pas $x + y + z = 1$: G ne contient pas le vecteur nul, donc **non**. (C'est un plan affine, pas un sous-espace vectoriel.)

Exercice 5

Déterminer la dimension de $H = \text{Vect} \{(1; 0; 1); (2; 0; 2); (0; 1; 0)\}$.

Correction

Le deuxième vecteur est le double du premier : il est inutile. $H = \text{Vect} \{(1; 0; 1); (0; 1; 0)\}$, et ces deux vecteurs sont non colinéaires : $\dim H = 2$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x; y) = (x + y; x - y)$. Montrer que f est linéaire, déterminer son noyau et conclure.

Correction

$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$ par calcul direct sur les coordonnées : f est **linéaire**.
 $f(x; y) = (0; 0)$ donne $x + y = 0$ et $x - y = 0$, donc $x = y = 0$: $\ker f = \{\vec{0}\}$. f est injective ; d'après le théorème du rang, $\dim \text{Im } f = 2 - 0 = 2$, donc f est **bijective**.

Exercice 7

Montrer que $F = \{(x; y; z) ; x = y \text{ et } z = 0\}$ est une droite vectorielle.

Correction

Un élément de F s'écrit $(x; x; 0) = x(1; 1; 0)$: $F = \text{Vect} \{(1; 1; 0)\}$. C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 1, c'est-à-dire une **droite vectorielle**.