

2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 13

Dénombrement et probabilités

Conditionnelles · Bayes · Loi binomiale

Ce que nous allons apprendre

- Outils de dénombrement
- Probabilité et événement contraire
- Probabilités conditionnelles
- Indépendance
- Probabilités totales et Bayes
- Variables aléatoires et loi binomiale

Quatre formules

Situation	Nombre
Avec remise, ordonné	n^p
Sans remise, ordonné	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Sans remise, non ordonné	$\binom{n}{p}$
Toutes les places	$n!$

Quatre règles

Règle	Formule
Équiprobabilité	$\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$
Contraire	$1 - P(A)$
Réunion	$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Conditionnelle	$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Simultané : des combinaisons

Exemple. 4 blanches, 6 noires ; on tire 3 boules.

- 1 Total : $\binom{10}{3} = 120$.
- 2 Exactement 2 blanches : $\binom{4}{2} \binom{6}{1} = 36$, donc $P = \frac{3}{10}$.
- 3 Au moins une blanche : $1 - \frac{\binom{6}{3}}{120} = \frac{5}{6}$.

Un test, pas une intuition

CRITÈRE

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

équivalent aussi à $P(A \mid B) = P(A)$.

ATTENTION

Indépendants n'est pas **incompatibles** : deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.

Multiplier puis additionner

RÈGLES DE L'ARBRE

On **multiplie** le long d'une branche, on **additionne** entre les branches menant au même événement.

PROBABILITÉS TOTALES

$$P(A) = \sum_i P(B_i) P(A \mid B_i)$$

Retourner le conditionnement

FORMULE

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) P(A \mid B)}{P(A)}$$

Exemple. Machine A : 70 % de la production, 3 % de défauts ; machine B : 30 % et 8 %.

❶ $P(D) = 0,7 \times 0,03 + 0,3 \times 0,08 = 0,045.$

❷ $P(A \mid D) = \frac{0,021}{0,045} = \frac{7}{15}.$

Loi, espérance, variance

DÉFINITIONS

$$E(X) = \sum_k x_k P(X = x_k) \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

CONTRÔLE

La somme des probabilités d'une loi doit toujours valoir 1.

Répéter une épreuve

CONDITIONS

n épreuves **identiques** et **indépendantes**, chacune à deux issues, de probabilité de succès p .

FORMULES

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$$

APPLICATION 1

$$\mathcal{B}\left(6; \frac{1}{3}\right)$$

$$\textcircled{1} \quad P(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4.$$

$$\textcircled{2} \quad = 15 \times \frac{1}{9} \times \frac{16}{81} = \frac{80}{243}.$$

$$\textcircled{3} \quad E(X) = 2 \text{ et } V(X) = \frac{4}{3}.$$

APPLICATION 2

Le plus grand numéro

Énoncé. 5 boules numérotées ; on en tire 2, X est le plus grand numéro.

1 $\binom{5}{2} = 10$ tirages ; $P(X = k) = \frac{k-1}{10}$ pour k de 2 à 5.

2 Contrôle : $\frac{1+2+3+4}{10} = 1 \checkmark$

3 $E(X) = \frac{2+6+12+20}{10} = 4.$

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Tirage simultané	$\binom{n}{p}$
Conditionnelle	$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Indépendance	$P(A)P(B)$
Totales	$\sum P(B_i)P(A B_i)$
Binomiale	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$