



Dénombrement et probabilités — Exercices d'approfondissement

2ème Bac · Probabilités

Série 2 — dénombrement, conditionnement, indépendance, variables aléatoires et loi binomiale.

Exercice 1

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire simultanément 3 boules. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 blanches.

Correction

Le nombre de tirages possibles est $\binom{10}{3} = 120$. Les tirages favorables :
 $\binom{4}{2} \times \binom{6}{1} = 6 \times 6 = 36$. $P = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

Exercice 2

Avec la même urne, calculer la probabilité d'obtenir **au moins** une blanche.

Correction

L'événement contraire est « aucune blanche » : $\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$. Donc $P = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Exercice 3

On lance un dé équilibré 4 fois. Calculer la probabilité de n'obtenir aucun 6, puis celle d'obtenir au moins un 6.

Correction

Les lancers sont indépendants : $P(\text{aucun } 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$.
 $P(\text{au moins un } 6) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$.

Exercice 4

Un atelier a deux machines : A produit 70 % des pièces avec 3 % de défauts, B produit 30 % avec 8 % de défauts. Une pièce prise au hasard est défectueuse : quelle est la probabilité qu'elle vienne de A ?

Correction

Probabilités totales : $P(D) = 0,7 \times 0,03 + 0,3 \times 0,08 = 0,021 + 0,024 = 0,045$. Formule

de Bayes : $P(A | D) = \frac{0,021}{0,045} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{1}{3}$. Calculer $P(X = 2)$, $E(X)$ et $V(X)$.

Correction

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 15 \times \frac{1}{9} \times \frac{16}{81} = \frac{240}{729} = \frac{80}{243}.$$
$$E(X) = np = 6 \times \frac{1}{3} = 2 \text{ et } V(X) = np(1 - p) = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Exercice 6

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire simultanément 2 boules et on note X le plus grand des deux numéros. Déterminer la loi de X et $E(X)$.

Correction

$\binom{5}{2} = 10$ tirages. Pour $X = k$ (k de 2 à 5), la deuxième boule est choisie parmi les $k - 1$ numéros inférieurs : $P(X = k) = \frac{k - 1}{10}$.

k	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

La somme vaut $\frac{1 + 2 + 3 + 4}{10} = 1 \checkmark$.

$$E(X) = \frac{2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4}{10} = \frac{40}{10} = 4.$$

Exercice 7

A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,2$. Les événements sont-ils indépendants ? Calculer $P(A \cup B)$ et $P(A | B)$.

Correction

$P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2 = P(A \cap B)$: les événements sont **indépendants**.

$P(A \cup B) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7$. $P(A | B) = \frac{0,2}{0,4} = 0,5 = P(A)$, ce qui confirme l'indépendance.