

2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 12

Espaces vectoriels réels

Sous-espaces · Bases · Dimension

Ce que nous allons apprendre

- Espace vectoriel réel
- Sous-espaces vectoriels
- Combinaisons linéaires et Vect
- Familles libres et génératrices
- Base et dimension
- Applications linéaires

1 · DÉFINITION

Deux opérations

ESPACE VECTORIEL RÉEL

Un ensemble E muni d'une **addition** (groupe commutatif) et d'une **multiplication par un réel**, compatibles entre elles.

EXEMPLES

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, l'ensemble des polynômes, l'ensemble des suites réelles.

Le critère unique

CRITÈRE

$F \subset E$ est un sous-espace si $\vec{0} \in F$ et

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad u + \lambda v \in F$$

TEST RAPIDE

Si $\vec{0} \notin F$, ce n'est **jamais** un sous-espace : c'est le premier réflexe.

Un plan vectoriel

Énoncé. $F = \{(x; y; z) ; x + y + z = 0\}$.

- ➊ $\vec{0} \in F$, et la relation est conservée par somme et par produit par un réel.
- ➋ $z = -x - y$ donne $(x; y; -x - y)$.
- ➌ $= x(1; 0; -1) + y(0; 1; -1) : \dim F = 2$.

Engendrer un sous-espace

DÉFINITION

$\text{Vect}(u_1 ; \dots ; u_p)$ est l'ensemble des **combinaisons linéaires**
 $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$.

PROPRIÉTÉ

C'est toujours un sous-espace vectoriel : le **plus petit** contenant ces vecteurs.

Un système à résoudre

FAMILLE LIBRE

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = \vec{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

DEUX VECTEURS

Ils sont **liés** si et seulement s'ils sont **colinéaires**.

Libre et génératrice

DÉFINITION

Une **base** est une famille à la fois **libre** et **génératrice** : tout vecteur s'écrit d'une **seule** façon dans cette base.

CRITÈRE PRATIQUE

Dans un espace de dimension n , une famille **libre** de n vecteurs est automatiquement une base.

5 · EXEMPLE

Une base de $\mathbb{R}^3$

Énoncé. $u(1; 1; 0)$, $v(0; 1; 1)$, $w(1; 0; 1)$.

- 1 $au + bv + cw = \vec{0}$ donne $a + c = 0$, $a + b = 0$, $b + c = 0$.
- 2 En substituant : $-2a = 0$, donc $a = b = c = 0$.
- 3 Libre et 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: c'est une **base**.

Un nombre invariant

Espace	Dimension
$\{\vec{0}\}$	0
Droite vectorielle	1
Plan vectoriel	2
$\mathbb{R}^n$	n

RÈGLE

$F \subset E \Rightarrow \dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Noyau, image, rang

DÉFINITION

$$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$$

THÉORÈME DU RANG

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$$

et f est injective si et seulement si $\ker f = \{\vec{0}\}$.

APPLICATION

$$\underline{f(x; y) = (x + y; x - y)}$$

- 1 La linéarité se vérifie sur les coordonnées.
- 2 $f(x; y) = \vec{0}$ donne $x + y = 0$ et $x - y = 0$, donc $\ker f = \{\vec{0}\}$.
- 3 Théorème du rang : $\dim \operatorname{Im} f = 2$, donc f est **bijective**.

L'essentiel de la leçon

Notion	Point clé
Sous-espace	$\vec{0} \in F$ et stabilité
Famille libre	système homogène
Base	libre + génératrice
Dimension	nombre de vecteurs d'une base
Rang	$\dim \ker + \dim \text{Im} = \dim E$