



Structures algébriques — Fiche de révision

2ème Bac · Structures algébriques

L'essentiel en une page

Propriété	Écriture
Associativité	$(x * y) * z = x * (y * z)$
Commutativité	$x * y = y * x$
Neutre e	$x * e = e * x = x$
Symétrique x'	$x * x' = x' * x = e$

Groupe : une loi interne **associative**, admettant un **neutre**, et telle que **tout** élément ait un symétrique. Commutatif (ou abélien) si la loi l'est.

Sous-groupe : $H \neq \emptyset$, $H \subset G$, et $\forall x, y \in H, x * y^{-1} \in H$ (critère unique).

Structure	Conditions
Anneau	$(A; +)$ groupe abélien, $\times$ associative et distributive
Anneau unitaire	il existe un élément unité 1
Corps	anneau unitaire où tout élément non nul est inversible

Morphisme : $f(x * y) = f(x) * f(y)$. Alors $f(e) = e'$ et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. Bijectif $\Rightarrow$ **isomorphisme**.

Noyau : $\ker f = \{x ; f(x) = e'\}$; f est injectif si et seulement si $\ker f = \{e\}$.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un **corps** si et seulement si n est **premier**.

Ce que je dois savoir faire

- Vérifier les quatre axiomes d'un groupe sur une loi donnée.
- Utiliser le critère du sous-groupe.
- Démontrer qu'une application est un morphisme et calculer son noyau.
- Trouver les inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Distinguer anneau, anneau unitaire et corps.

Les pièges à éviter

- Vérifier d'abord la **stabilité** de la loi sur l'ensemble.
- Un neutre doit convenir pour **tous** les éléments.
- Dans un groupe, **tout** élément a un symétrique : exclure les valeurs interdites.
- Un anneau sans diviseurs de zéro n'est pas forcément un corps.

Testez-vous en 3 minutes

Neutre de $x * y = x + y - 5$? Symétrique de x ? $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est-il un corps ? Noyau de $x \mapsto \ln x$?

Réponses

5 ; $10 - x$; oui (7 est premier) ; $\{1\}$.