



Structures algébriques — Exercices d'approfondissement

2ème Bac · Structures algébriques

Série 2 — lois de composition, groupes, sous-groupes, morphismes, anneaux et corps.

Exercice 1

Sur $\mathbb{R}$ on pose $x * y = x + y - 3$. Montrer que $(\mathbb{R}; *)$ est un groupe commutatif.

Correction

Commutativité : $x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x$. **Associativité :** $(x * y) * z = (x + y - 3) + z - 3 = x + y + z - 6$ et $x * (y * z) = x + (y + z - 3) - 3 = x + y + z - 6$. **Neutre :** $x * e = x$ donne $x + e - 3 = x$, donc $e = 3$. **Symétrique :** $x * x' = 3$ donne $x + x' - 3 = 3$, donc $x' = 6 - x$. $(\mathbb{R}; *)$ est donc un groupe commutatif de neutre 3.

Exercice 2

Montrer que $G = \{2^n; n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*; \times)$.

Correction

$G \subset \mathbb{R}^*$ et $1 = 2^0 \in G$, donc $G \neq \emptyset$. Pour 2^n et 2^m dans G : $2^n \times (2^m)^{-1} = 2^{n-m} \in G$ car $n - m \in \mathbb{Z}$. G est donc un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*; \times)$.

Exercice 3

Sur $E = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on pose $x * y = x + y + xy$. Montrer que $(E; *)$ est un groupe commutatif.

Correction

Stabilité : si $x * y = -1$ alors $x + y + xy + 1 = 0$, soit $(1 + x)(1 + y) = 0$: impossible car $x \neq -1$ et $y \neq -1$. Donc $x * y \in E$. **Associativité :** les deux calculs donnent $x + y + z + xy + xz + yz + xyz$. **Commutativité :** l'expression est symétrique en x et y . **Neutre :** $x * e = x$ donne $e(1 + x) = 0$, donc $e = 0$. **Symétrique :** $x + x' + xx' = 0$ donne $x'(1 + x) = -x$, donc $x' = \frac{-x}{1 + x}$, qui est bien dans E .

Exercice 4

Soit $f : (\mathbb{R}; +) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*; \times)$ définie par $f(x) = e^x$. Montrer que f est un isomorphisme de groupes.

Correction

$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y = f(x) \times f(y)$: f est un **morphisme**. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue, avec $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$: c'est une **bijection** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est un isomorphisme, et $f(0) = 1$ confirme que le neutre est envoyé sur le neutre.

Exercice 5

Soit $E = \{a + b\sqrt{2} ; (a; b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Montrer que $(E; +; \times)$ est un corps commutatif.

Correction

E est stable par addition et par produit :

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

0 et 1 appartiennent à E , et l'opposé de $a + b\sqrt{2}$ est $-a - b\sqrt{2} \in E$. **Inverse** : si $a + b\sqrt{2} \neq 0$, alors $a^2 - 2b^2 \neq 0$ (sinon $\sqrt{2} = \left|\frac{a}{b}\right|$ serait rationnel), et

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} \in E.$$

$(E; +; \times)$ est donc un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Montrer que tout sous-groupe H de $(\mathbb{Z}; +)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$.

Correction

Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$. Sinon H contient un entier non nul, donc un entier strictement positif (il contient aussi son opposé). Soit n le **plus petit** élément strictement positif de H . $n\mathbb{Z} \subset H$ car H est stable. Réciproquement, pour $h \in H$: $h = nq + r$ avec $0 \leq r < n$, et $r = h - nq \in H$; la minimalité de n impose $r = 0$. Donc $H = n\mathbb{Z}$.

Exercice 7

Montrer que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +; \times)$ est un corps.

Correction

C'est un anneau commutatif unitaire. Il reste à inverser chaque classe non nulle : $\bar{1} \times \bar{1} = \bar{1}$; $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{6} = \bar{1}$; $\bar{4} \times \bar{4} = \bar{16} = \bar{1}$. Toute classe non nulle est inversible : c'est un corps (ce qui vaut pour $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier).