

2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 11

Structures algébriques

Groupes · Anneaux · Corps · Morphismes

Ce que nous allons apprendre

- Lois de composition internes
- La structure de groupe
- Le critère du sous-groupe
- Morphismes et noyau
- Anneaux et corps
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Les propriétés à tester

Propriété	Écriture
Stabilité	$x * y \in E$
Associativité	$(x * y) * z = x * (y * z)$
Commutativité	$x * y = y * x$
Neutre	$x * e = e * x = x$
Symétrique	$x * x' = e$

Trois axiomes

DÉFINITION

$(G; *)$ est un **groupe** si $*$ est associative, possède un **neutre**, et si **tout** élément admet un symétrique.

EXEMPLES

$(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{R}^*; \times)$, $(\mathbb{C}; +)$ sont des groupes commutatifs ; $(\mathbb{N}; +)$ n'en est pas un.

2 · UN EXEMPLE

$$\underline{x * y = x + y - 3 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

- 1 Associative : les deux calculs donnent $x + y + z - 6$.
- 2 Neutre : $x + e - 3 = x$ donne $e = 3$.
- 3 Symétrique : $x + x' - 3 = 3$ donne $x' = 6 - x$.

Un seul critère

CRITÈRE

$H \subset G$ est un sous-groupe si $H \neq \emptyset$ et

$$\forall x, y \in H, \quad x * y^{-1} \in H$$

Exemple. $G = \{2^n ; n \in \mathbb{Z}\} : 1 \in G$ et $2^n \times (2^m)^{-1} = 2^{n-m} \in G$.

Transporter la structure

DÉFINITION

$$f(x * y) = f(x) \star f(y)$$

Alors $f(e) = e'$ et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

NOYAU

$\ker f = \{x ; f(x) = e'\}$; f est **injectif** si et seulement si $\ker f = \{e\}$.

4 · DEUX MORPHISMES

exp et ln

- 1 $\exp : (\mathbb{R} ; +) \rightarrow (\mathbb{R}_+^* ; \times)$ car $e^{x+y} = e^x e^y$.
- 2 $\ln : (\mathbb{R}_+^* ; \times) \rightarrow (\mathbb{R} ; +)$ car $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
- 3 Ce sont des **isomorphismes** réciproques l'un de l'autre.

Deux lois

DÉFINITION

$(A; +; \times)$ est un **anneau** si $(A; +)$ est un groupe commutatif et si $\times$ est associative et **distributive** sur $+$.

UNITAIRE

S'il existe un élément **unité** $1 \neq 0$: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont des anneaux unitaires.

Tout inverser

DÉFINITION

Un **corps** est un anneau unitaire dans lequel **tout** élément non nul est inversible.

EXEMPLES

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des corps ; $\mathbb{Z}$ n'en est pas un (seuls ± 1 sont inversibles).

Quand est-ce un corps ?

RÈGLE

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps **si et seulement si** n est **premier**.

- 1 Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$ et $\bar{4} \times \bar{4} = \bar{1}$ — tout s'inverse.
- 2 Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{0}$ — il y a des **diviseurs de zéro**.

Un sous-corps de $\mathbb{R}$

Énoncé. $E = \{a + b\sqrt{2} ; (a ; b) \in \mathbb{Q}^2\}$.

- ➊ Stable : $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$.
- ➋ $a^2 - 2b^2 \neq 0$ si $a + b\sqrt{2} \neq 0$, car $\sqrt{2}$ est **irrationnel**.
- ➌ $\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} \in E : E$ est un corps.

L'essentiel de la leçon

Structure	Condition clé
Groupe	neutre + tout symétrique
Sous-groupe	$x * y^{-1} \in H$
Morphisme	$f(x * y) = f(x) \star f(y)$
Anneau	distributivité
Corps	tout non nul inversible