



Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ — Exercices d'approfondissement

2ème Bac · Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Série 2 — Bézout, Gauss, congruences et petit théorème de Fermat.

Exercice 1

Déterminer le PGCD de 2 023 et 1 071, puis une relation de Bézout.

Correction

$2\,023 = 1 \times 1\,071 + 952$; $1\,071 = 1 \times 952 + 119$; $952 = 8 \times 119 + 0$: le PGCD est 119.
Remontée : $119 = 1\,071 - 952 = 1\,071 - (2\,023 - 1\,071) = 2 \times 1\,071 - 2\,023$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $5x - 3y = 1$.

Correction

Solution particulière : $(2; 3)$ car $10 - 9 = 1$. Solutions générales : $x = 2 + 3k$ et $y = 3 + 5k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

Déterminer le reste de 7^{100} modulo 11.

Correction

D'après le petit théorème de Fermat, $7^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. $100 = 10 \times 10$, donc $7^{100} \equiv 1 \pmod{11}$: le reste est 1.

Exercice 4

Résoudre le système de congruences
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

Correction

$x = 2 + 3k$; on veut $2 + 3k \equiv 3 \pmod{5}$, soit $3k \equiv 1 \pmod{5}$. L'inverse de 3 modulo 5 est 2 : $k \equiv 2 \pmod{5}$, donc $k = 2 + 5m$ et $x = 8 + 15m$.

Exercice 5

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^5 - n$ est divisible par 30.

Correction

$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$. Le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 6 ; pour 5, on applique Fermat : $n^5 \equiv n \pmod{5}$. Comme 5 et 6 sont premiers entre eux, le produit est divisible par 30.

Exercice 6

Montrer que si $d = \text{PGCD}(a; b)$, alors $\text{PGCD}\left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}\right) = 1$.

Correction

D'après Bézout, $au + bv = d$; en divisant par d : $\frac{a}{d}u + \frac{b}{d}v = 1$. D'après la réciproque de Bézout, les deux quotients sont **premiers entre eux**.

Exercice 7

Déterminer les entiers n tels que $n + 3$ divise $n^2 + 1$.

Correction

$n^2 + 1 = (n + 3)(n - 3) + 10$, donc $n + 3$ doit diviser 10. Les diviseurs de 10 sont $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$: $n \in \{-2; -4; -1; -5; 2; -8; 7; -13\}$.