

2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 9

# Produit scalaire et produit vectoriel

---

Dans l'espace · Aires · Volumes · Distances

# Ce que nous allons apprendre

---

- Produit scalaire dans l'espace
- Le produit vectoriel
- Aires et volumes
- Équation cartésienne d'un plan
- Distances point-plan et point-droite
- Intersections

# Un nombre

## REPÈRE ORTHONORMÉ

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

## ORTHOGONALITÉ

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

# Un vecteur

### DÉFINITION EN COORDONNÉES

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy' ; zx' - xz' ; xy' - yx')$$

### PROPRIÉTÉ CLÉ

$\vec{u} \wedge \vec{v}$  est **orthogonal** à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ .

## Ce qu'il faut savoir

| Propriété    | Écriture                                                   |
|--------------|------------------------------------------------------------|
| Antisymétrie | $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$         |
| Vecteur nul  | $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \text{colinéaires}$ |
| Norme        | $  \vec{u}     \vec{v}    \sin \theta $                    |
| Base         | $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$                         |

## 2 · UN CALCUL

$\vec{u}(1; 2; 3)$  **et**  $\vec{v}(2; -1; 1)$

- 1 Première coordonnée :  $2 \times 1 - 3 \times (-1) = 5$ .
- 2 Deuxième :  $3 \times 2 - 1 \times 1 = 5$  ; troisième :  $1 \times (-1) - 2 \times 2 = -5$ .
- 3  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (5; 5; -5)$ , de norme  $5\sqrt{3}$ .

## Trois formules

| Objet            | Formule                                                                |
|------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Parallélogramme  | $\ \vec{u} \wedge \vec{v}\ $                                           |
| Triangle $ABC$   | $\frac{1}{2} \ \vec{AB} \wedge \vec{AC}\ $                             |
| Tétraèdre $ABCD$ | $\frac{1}{6} \left  (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} \right $ |

## Par un point et une normale

### ÉQUATION

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

où  $\vec{n}(a; b; c)$  est normal au plan.

### PAR TROIS POINTS

Le vecteur  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  fournit directement la **normale**.

#### 4 · EXEMPLE

## Le plan ( $ABC$ )

**Énoncé.**  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$ .

- ➊  $\vec{AB}(-1; 1; 0)$  et  $\vec{AC}(-1; 0; 1)$ .
- ➋  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (1; 1; 1)$ .
- ➌ Équation :  $x + y + z - 1 = 0$ .

## Deux formules

### POINT-PLAN

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

### POINT-DROITE

$$d = \frac{\|\vec{BA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

où la droite passe par  $B$  et est dirigée par  $\vec{u}$ .

## APPLICATION 1

# Un volume

**Énoncé.**  $O, A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 3)$ .

- ➊  $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = (0; 0; 2)$ .
- ➋ Produit mixte :  $(0; 0; 2) \cdot (0; 0; 3) = 6$ .
- ➌  $\mathcal{V} = \frac{6}{6} = 1 \text{ u.v.}$

## APPLICATION 2

# Une distance à une droite

**Énoncé.**  $A(1; 1; 1)$  et la droite  $(O; \vec{i})$ .

- ➊  $\vec{OA}(1; 1; 1)$  et  $\vec{i}(1; 0; 0)$ .
- ➋  $\vec{OA} \wedge \vec{i} = (0; 1; -1)$ , de norme  $\sqrt{2}$ .
- ➌  $\|\vec{i}\| = 1$ , donc  $d = \sqrt{2}$ .

# L'essentiel de la leçon

| Outil                    | Usage                    |
|--------------------------|--------------------------|
| $\vec{u} \cdot \vec{v}$  | orthogonalité, angles    |
| $\vec{u} \wedge \vec{v}$ | normale, colinéarité     |
| $\frac{1}{2} \ \wedge\ $ | aire d'un triangle       |
| Produit mixte            | volume, coplanarité      |
| Formules de distance     | point-plan, point-droite |