

2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 8

Équations différentielles

Premier ordre · Second ordre · Modèles

Ce que nous allons apprendre

- L'équation $y' = ay$
- Conditions initiales
- L'équation caractéristique
- Les trois cas du second ordre
- Équation avec second membre
- Deux modèles concrets

1 · PREMIER ORDRE

$$\underline{y' = ay}$$

SOLUTIONS

$$y(x) = Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}$$

FORME ÉQUIVALENTE

$y' + ay = 0$ a pour solutions $y(x) = Ce^{-ax}$: attention au **signe**.

Déterminer C

Exemple. $y' - 3y = 0$ avec $y(0) = 4$.

- 1 Les solutions sont $y(x) = Ce^{3x}$.
- 2 $y(0) = C = 4$.
- 3 La solution unique est $y(x) = 4e^{3x}$.

L'équation caractéristique

MÉTHODE

À $ay'' + by' + cy = 0$ on associe

$$ar^2 + br + c = 0$$

et le discriminant Δ décide de la forme des solutions.

DEUX CONSTANTES

Il faut **deux** conditions ($y(x_0)$ et $y'(x_0)$) pour les déterminer.

Selon le signe de Δ

Cas	Solutions
$\Delta > 0 : r_1 \neq r_2$	$Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$
$\Delta = 0 : r$ double	$(Ax + B)e^{rx}$
$\Delta < 0 : \alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

3 · CAS $\Delta > 0$

$$\underline{y'' - 3y' + 2y = 0}$$

- ❶ $r^2 - 3r + 2 = 0$ donne $r = 1$ et $r = 2$.
- ❷ $y(x) = Ae^x + Be^{2x}$.
- ❸ Avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$: $A = 2$, $B = -1$.

3 · CAS $\Delta = 0$

$$\underline{y'' + 6y' + 9y = 0}$$

- 1 $(r + 3)^2 = 0$: racine double $r = -3$.
- 2 $y(x) = (Ax + B)e^{-3x}$.
- 3 Avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$: $B = 1$ et $A = 3$.

3 · CAS $\Delta < 0$

$$\underline{y'' + 2y' + 5y = 0}$$

- 1 $\Delta = 4 - 20 = -16$, donc $r = -1 \pm 2i$.
- 2 $y(x) = e^{-x} (A \cos 2x + B \sin 2x)$.
- 3 Les solutions **oscillent** en s'amortissant.

Homogène + particulière

PRINCIPE

Solution générale de $L(y) = g$ = solution générale de $L(y) = 0$ + une solution **particulière**.

Exemple. $y'' + y = x$: $y_p(x) = x$ convient, donc
 $y = A \cos x + B \sin x + x$.

APPLICATION 1

Une décroissance

Énoncé. $N'(t) = -\lambda N(t)$ avec $N(0) = N_0$.

- 1 $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.
- 2 Demi-vie : $N(T) = \frac{N_0}{2}$ donne $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$.
- 3 Donc $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

APPLICATION 2

Un oscillateur

Énoncé. $y'' + \omega^2 y = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$.

- 1 $r = \pm i\omega$ donne $y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.
- 2 $A = y_0$ et $\omega B = 0$ donc $B = 0$.
- 3 $y(t) = y_0 \cos \omega t$, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

L'essentiel de la leçon

Équation	Solutions
$y' = ay$	Ce^{ax}
$\Delta > 0$	$Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$
$\Delta = 0$	$(Ax + B)e^{rx}$
$\Delta < 0$	$e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$
Second membre	homogène + particulière