

2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 7

Primitives et calcul intégral

Primitives · Intégration par parties · Aires

Ce que nous allons apprendre

- Primitives usuelles
- Primitives de formes composées
- Propriétés de l'intégrale
- Intégration par parties
- Aire et valeur moyenne
- Une suite d'intégrales

Le tableau de base

$f(x)$	Une primitive
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$

2 · FORMES COMPOSÉES

Reconnaître $u' \times \dots$

Forme	Primitive
$u' u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$u' e^u$	e^u
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u' \cos u$	$\sin u$

Manipuler une intégrale

Propriété	Écriture
Fondamentale	$\int_a^b f = F(b) - F(a)$
Linéarité	$\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$
Découpage	$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$
Orientation	$\int_a^b = -\int_b^a$
Positivité	$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

La formule et son choix

FORMULE

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

CHOIX

On dérive le facteur **polynomial** ou le **ln** ; on primitive e^x , $\cos x$, $\sin x$.

4 · EXEMPLE

$$\int_0^1 x e^x dx$$

❶ $v = x$ (à dériver), $u' = e^x$ (à primitiver).

❷ $[x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1).$

❸ L'intégrale vaut 1.

4 · AVEC $\ln$

$$\int_1^e \ln x \, dx$$

- ❶ $v = \ln x$ et $u' = 1$, donc $u = x$.
- ❷ $[x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx = e - (e - 1)$.
- ❸ L'intégrale vaut 1.

Interprétation géométrique

si $f \geq 0$

$\int_a^b f(x) dx$ est l'aire, en unités d'aire, entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$, $x = b$.

ENTRE DEUX COURBES

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad \text{si } f \geq g$$

Et encadrement

VALEUR MOYENNE

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

INÉGALITÉ DE LA MOYENNE

Si $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

APPLICATION 1

Une aire entre deux courbes

Énoncé. $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ sur $[0 ; 1]$.

1 Sur $[0 ; 1]$, $x \geq x^2$: f est au-dessus.

2
$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1.$$

3 L'aire vaut $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ u.a.

APPLICATION 2

Une relation de récurrence

Énoncé. $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$

- ➊ Par parties : $I_{n+1} = \left[-x^{n+1} e^{-x} \right]_0^1 + (n+1)I_n.$
- ➋ Donc $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}.$
- ➌ $I_0 = 1 - e^{-1}$, ce qui permet de calculer tous les $I_n.$

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Fondamentale	$F(b) - F(a)$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
Par parties	$[uv] - \int uv'$
Aire	$\int (f - g)$
Moyenne	$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$