

2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 6

Nombres complexes

Forme exponentielle · Moivre · Racines n -ièmes

Ce que nous allons apprendre

- Forme algébrique et conjugué
- Module et argument
- Forme trigonométrique et exponentielle
- Formules de Moivre et d'Euler
- Racines n -ièmes de l'unité
- Interprétation géométrique

1 · FORME ALGÈBRIQUE

$$z = a + ib \text{ avec } i^2 = -1$$

Notion	Expression
Conjugué	$\bar{z} = a - ib$
Module	$ z = \sqrt{a^2 + b^2}$
Produit remarquable	$z\bar{z} = z ^2$
Inverse	$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}$

Les règles multiplicatives

Module	Argument
$ zz' = z z' $	$\arg(zz') = \arg z + \arg z'$
$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$	$\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$
$ z^n = z ^n$	$\arg z^n = n \arg z$

3 · FORME EXPONENTIELLE

$$z = re^{i\theta}$$

NOTATION

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad z = r (\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

Exemple. $1 + i$: module $\sqrt{2}$, argument $\frac{\pi}{4}$, donc $1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$.

Élever à la puissance n

FORMULE DE MOIVRE

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

FORMULES D'EULER

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Calculer $(1 + i)^{12}$

- 1 $1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}.$
- 2 $(1 + i)^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} e^{3i\pi} = 64 e^{3i\pi}.$
- 3 $e^{3i\pi} = e^{i\pi} = -1$, donc $(1 + i)^{12} = -64.$

Les solutions de $z^n = 1$

FORMULE

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$$

GÉOMÉTRIE

Ces n points forment un **polygone régulier** inscrit dans le cercle unité, et leur **somme est nulle**.

5 · EXEMPLE

Les racines cubiques de 1

- 1 $z_0 = 1, z_1 = e^{2i\pi/3} = j, z_2 = e^{4i\pi/3} = j^2 = \bar{j}.$
- 2 $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $1 + j + j^2 = 0.$
- 3 Les trois points forment un **triangle équilatéral**.

Quand $\Delta < 0$

RÈGLE

Si $\Delta < 0$, les solutions sont

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

et elles sont **conjuguées**.

Exemple. $z^2 - 2z + 2 = 0$: $\Delta = -4$, donc $z = 1 \pm i$.

Lire les transformations

Écriture	Signification
$ z - a $	distance AM
$\arg \frac{c-a}{b-a}$	angle $(\vec{AB}; \vec{AC})$
$z' = z + b$	translation
$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$	rotation de centre ω
$z' - \omega = k(z - \omega)$	homothétie de rapport k

APPLICATION

Un triangle rectangle isocèle

Énoncé. $a = 1 + i$, $b = 3 + 3i$, $c = -1 + 3i$.

- 1 $b - a = 2 + 2i$ et $c - a = -2 + 2i$.
- 2 $\frac{c - a}{b - a} = \frac{-2 + 2i}{2 + 2i} = i$.
- 3 Module 1 et argument $\frac{\pi}{2}$: le triangle est **rectangle isocèle** en A .

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Module	$\sqrt{a^2 + b^2}$
Exponentielle	$re^{i\theta}$
Moivre	$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
Racines de l'unité	$e^{2ik\pi/n}$
Rotation	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$