

2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 5

Fonctions exponentielles

Réciproque de $\ln$ · a^x · Croissances comparées

Ce que nous allons apprendre

- $\exp$, réciproque de $\ln$
- Propriétés algébriques
- Dérivée et variations
- Limites de référence
- La fonction $x \mapsto a^x$
- Deux études de fonctions

1 · DÉFINITION

La bijection réciproque

DÉFINITION

$\exp$ est la bijection réciproque de $\ln$: pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$,

$$y = e^x \iff x = \ln y$$

CONSÉQUENCES

$e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^x > 0$ pour tout x , $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln y} = y$.

Les règles de calcul

Règle	Formule
Somme	$e^{a+b} = e^a e^b$
Différence	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
Opposé	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
Puissance	$(e^a)^n = e^{na}$

Strictement croissante

DÉRIVÉE

$$(e^x)' = e^x \quad (e^u)' = u'e^u$$

LIMITES AUX BORNES

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Les limites à savoir

Limite	Valeur
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$	0
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$	1
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$	$+\infty$

Équations et inéquations

RÈGLES

$$e^a = e^b \iff a = b \text{ et } e^a < e^b \iff a < b.$$

Exemple. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

- ➊ Je pose $X = e^x > 0$: $X^2 - 3X + 2 = 0$.
- ➋ $X = 1$ ou $X = 2$, donc $x = 0$ ou $x = \ln 2$.

La fonction $x \mapsto a^x$

DÉFINITION (POUR $a > 0$)

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

VARIATION

Croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$.

7 · UNE LIMITE CÉLÈBRE

$$\underline{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \rightarrow e^a}$$

❶ $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}.$

❷ Or $n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = a \times \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} \rightarrow a \times 1.$

❸ Par continuité de **exp**, la limite vaut e^a .

APPLICATION 1

$$\underline{f(x) = xe^{-x}}$$

- 1 $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$, du signe de $1 - x$.
- 2 **Maximum** $f(1) = \frac{1}{e}$; croissante avant 1, décroissante après.
- 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$: asymptote $y = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$.

APPLICATION 2

$$\underline{g(x) = e^x - x - 1}$$

- ➊ $g'(x) = e^x - 1$, négative avant 0, positive après.
- ➋ Minimum $g(0) = 0$, donc $g \geq 0$.
- ➌ On en déduit l'inégalité $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .

Deux courbes symétriques

GÉOMÉTRIE

Les courbes de $\ln$ et de $\exp$ sont **symétriques** par rapport à la droite $y = x$.

TANGENTES

En 0, $\exp$ a pour tangente $y = x + 1$; en 1, $\ln$ a pour tangente $y = x - 1$.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Dérivée	$(e^u)' = u'e^u$
Somme	$e^{a+b} = e^a e^b$
Croissance comparée	$\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$
Base a	$a^x = e^{x \ln a}$
Inégalité	$e^x \geq x + 1$