

2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 4

Fonction logarithme népérien

Propriétés · Croissances comparées · Étude

Ce que nous allons apprendre

- Définition et propriétés algébriques
- Dérivée et variations
- Limites de référence
- Équations et inéquations
- Croissances comparées
- Deux études de fonctions

1 • DÉFINITION

La primitive de $\frac{1}{x}$

DÉFINITION

$\ln$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui vaut 0 en 1.

CONSÉQUENCES

$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, et $\ln$ est définie **uniquement** pour $x > 0$.

Les cinq règles

Règle	Formule
Produit	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$
Quotient	$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
Inverse	$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
Puissance	$\ln a^n = n \ln a$
Racine	$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

Croissante sur $]0; +\infty[$

DÉRIVÉE

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0 \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

LIMITES AUX BORNES

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Les limites à savoir

Limite	Valeur
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$	0
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$	0
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$	1
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$	1

Équations et inéquations

RÈGLES

$\ln a = \ln b \iff a = b$; $\ln a < \ln b \iff a < b$ — sous réserve que $a > 0$ et $b > 0$.

Exemple. $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln 3$.

- ❶ Domaine : $x > 1$. L'équation devient $\ln(x^2 - 1) = \ln 3$.
- ❷ $x^2 = 4$: seule $x = 2$ convient.

ln perd toujours

RÈGLE GÉNÉRALE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$$

À L'ORIGINE

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

7 · UNE INÉGALITÉ CLÉ

$$\underline{\ln x \leq x - 1}$$

Démonstration. On étudie $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- ❶ $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}$.
- ❷ g décroît sur $]0; 1]$, croît sur $[1; +\infty[$: minimum $g(1) = 0$.
- ❸ Donc $g \geq 0$, c'est-à-dire $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

APPLICATION 1

Comparer π^e et e^π

- 1 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ a pour dérivée $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
- 2 h est **maximale** en e , donc $h(\pi) < h(e)$.
- 3 $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$ donne $e \ln \pi < \pi : \pi^e < e^\pi$.

APPLICATION 2

$$\underline{f(x) = x - \ln x}$$

- ➊ Domaine $]0; +\infty[$; $f'(x) = \frac{x-1}{x}$.
- ➋ Minimum $f(1) = 1 > 0$: la courbe ne coupe **jamais** l'axe (Ox).
- ➌ $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.

APPLICATION 3

Une primitive de $\ln$

RÉSULTAT

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

VÉRIFICATION

En dérivant $F(x) = x \ln x - x$: $F'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x \checkmark$

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Dérivée	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
Produit	$\ln a + \ln b$
Croissance comparée	$\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$
Inégalité	$\ln x \leq x - 1$
Primitive	$x \ln x - x$