



## Suites numériques — Exercices d'approfondissement

2ème Bac · Suites numériques

Série 2 — convergence, suites adjacentes et récurrences.

### Exercice 1

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}$ .

1. Montrer que  $1 \leq u_n \leq 2$  pour tout  $n$ .
2. Montrer que  $(u_n)$  est croissante.

#### Correction

1. Si  $1 \leq u_n \leq 2$ , alors  $u_{n+1} = 3 - \frac{5}{u_n + 3}$ , et  $u_n + 3 \in [4; 5]$ , donc  
$$u_{n+1} \in \left[ 3 - \frac{5}{4}; 3 - 1 \right] = [1,75; 2] : \text{l'encadrement est conservé.}$$
2.  $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3} = \frac{4 - u_n^2}{u_n + 3} \geq 0$  car  $u_n \leq 2$ .

### Exercice 2

Pour la suite précédente, en déduire la convergence et la limite.

#### Correction

La suite est croissante et majorée par 2 : elle **converge** vers  $\ell$ . Le point fixe vérifie  $\ell = \frac{3\ell + 4}{\ell + 3}$ , soit  $\ell^2 = 4$  : comme  $\ell \geq 1$ , on a  $\ell = 2$ .

### Exercice 3

Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \geq -1$ ,  $(1+x)^n \geq 1 + nx$  (inégalité de Bernoulli).

#### Correction

**Initialisation.**  $n = 0 : 1 \geq 1$ . **Hérédité.**

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ .  
(Le produit par  $1+x \geq 0$  conserve l'inégalité.)

### Exercice 4

Soient  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ . Montrer que  $(u_n)$  croît, que  $(v_n)$  décroît, et conclure.

### Correction

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 : (u_n) \text{ croît.}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)^2} < 0 : \\ (v_n) \text{ décroît. De plus } v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 : \text{ les suites sont } \mathbf{adjacentes}, \text{ donc elles convergent}$$

vers la même limite.

### Exercice 5

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  — on admettra le résultat.

### Correction

Cette limite vaut  $e$  : c'est l'une des définitions du nombre  $e$ .

### Exercice 6

Soit  $u_n = \frac{n!}{n^n}$ . Montrer que  $0 < u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$  pour  $n \geq 1$ , puis conclure.

### Correction

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}. \text{ Or } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2 \text{ pour } n \geq 1, \\ \text{donc le quotient est } \leq \frac{1}{2} : \text{ par comparaison, } u_n \rightarrow 0.$$

### Exercice 7

Soit  $(u_n)$  telle que  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$  avec  $u_0 = 2$ . Déterminer le point fixe positif.

### Correction

$$\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell} \text{ donne } \frac{\ell}{2} = \frac{1}{\ell}, \text{ soit } \ell^2 = 2 \text{ et } \ell = \sqrt{2}.$$