

2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 3

Suites numériques

Réurrence · Convergence · Suites récurrentes

Ce que nous allons apprendre

- Monotonie et bornes
- Le raisonnement par récurrence
- Théorème de la limite monotone
- Comparaison et gendarmes
- Suites arithmétiques et géométriques
- Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Décrire une suite

Propriété	Traduction
Croissante	$u_{n+1} - u_n \geq 0$
Décroissante	$u_{n+1} - u_n \leq 0$
Majorée	$\exists M, u_n \leq M$
Minorée	$\exists m, u_n \geq m$
Bornée	majorée et minorée

Deux étapes, jamais une

MÉTHODE

Initialisation : la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : si elle est vraie au rang n , elle l'est au rang $n + 1$.

EXEMPLE

Inégalité de Bernoulli : pour $a > -1$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Le théorème décisif

ÉNONCÉ

Une suite **croissante et majorée** converge ; une suite **décroissante et minorée** converge.

SINON

Croissante et **non** majorée : $u_n \rightarrow +\infty$.

Encadrer pour conclure

GENDARMES

Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $v_n \rightarrow \ell$, $w_n \rightarrow \ell$, alors $u_n \rightarrow \ell$.

Exemple. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$: les deux bornes tendent vers 0, donc $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$.

Arithmétique et géométrie

	Arithmétique	Géométrie
Relation	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
Terme général	$u_0 + nr$	$u_0 q^n$
Somme	$n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$	$u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

LIMITE

$q^n \rightarrow 0$ si $|q| < 1$; $q^n \rightarrow +\infty$ si $q > 1$.

6 · $u_{n+1} = f(u_n)$

La méthode en trois temps

- 1 Trouver un intervalle I **stable** : $f(I) \subset I$, et montrer $u_n \in I$ par récurrence.
- 2 Étudier la **monotonie** (signe de $u_{n+1} - u_n$).
- 3 Conclure par le théorème de la limite monotone, puis résoudre $\ell = f(\ell)$.

6 · EXEMPLE

$$\underline{u_0 = 1}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

- ➊ Par récurrence, $0 \leq u_n \leq 2$: si $u_n \leq 2$ alors $u_{n+1} \leq \sqrt{4} = 2$.
- ➋ $u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n + 2 - u_n^2 = -(u_n - 2)(u_n + 1) \geq 0$: la suite est **croissante**.
- ➌ Croissante et majorée : elle converge vers $\ell = \sqrt{\ell + 2}$, soit $\ell = 2$.

Rendre la suite géométrique

IDÉE

Pour $u_{n+1} = au_n + b$, on pose $v_n = u_n - \ell$ où $\ell = \frac{b}{1-a}$ est le **point fixe** :
 v_n est géométrique de raison a .

CONSÉQUENCE

$u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$, de limite ℓ si $|a| < 1$.

APPLICATION 1

$$\underline{u_0 = 5, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1}$$

- 1 Point fixe : $\ell = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.
- 2 $v_n = u_n - 2$ vérifie $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, avec $v_0 = 3$.
- 3 $u_n = 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 2$.

APPLICATION 2

Suites adjacentes

DÉFINITION

(u_n) croissante, (v_n) décroissante et $v_n - u_n \rightarrow 0$: les deux suites convergent vers la **même** limite.

CONSÉQUENCE

Pour tout n : $u_n \leq \ell \leq v_n$ — chaque couple de termes **encadre** la limite.

L'essentiel de la leçon

Question	Outil
Formule à tout rang	réurrence
Convergence	monotone + bornée
Limite d'un encadrement	gendarmes
$u_{n+1} = au_n + b$	$v_n = u_n - \ell$
Valeur de la limite	$\ell = f(\ell)$