



Dérivation et étude des fonctions — Exercices d'approfondissement

2ème Bac · Dérivation et étude des fonctions

Série 2 — dérivées, concavité, bijections et branches infinies.

Exercice 1

Calculer la dérivée de :

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ sur $]1; +\infty[$
2. $g(x) = \cos^3(2x)$

Correction

1. Avec $u = \frac{x-1}{x+1}$, $u' = \frac{2}{(x+1)^2}$: $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2 \sqrt{u}}$, soit
$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$
2. $g'(x) = 3 \cos^2(2x) \times (-2 \sin(2x)) = -6 \sin(2x) \cos^2(2x).$

Exercice 2

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

1. Déterminer les asymptotes.
2. Étudier les variations.

Correction

1. $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$: asymptote oblique $y = x + 1$ et verticale $x = 1$.
2. $f'(x) = 1 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2}$, qui s'annule en $1 \pm \sqrt{2}$: maximum local en $1 - \sqrt{2}$, minimum local en $1 + \sqrt{2}$.

Exercice 3

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Montrer que f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $[-2; +\infty[$.

Correction

$f'(x) = 3(x^2 - 1) \geq 0$ sur $]1; +\infty[$, nulle seulement en 1 : f est strictement croissante.
 $f(1) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: c'est une bijection sur $[-2; +\infty[$.

Exercice 4

Étudier la concavité de $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ et déterminer les points d'inflexion.

Correction

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$; $f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$, qui s'annule en $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ en changeant de signe. Il y a donc **deux** points d'inflexion, d'abscisses $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 5

Soit $f(x) = x\sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$. Étudier la dérivabilité en 0.

Correction

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h} \rightarrow 0 : f \text{ est } \mathbf{dérivable} \text{ en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$

Exercice 6

Déterminer les branches infinies de $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

Correction

$f(x) = x - \frac{x}{x^2 + 1}$, et $\frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow 0$: la droite $y = x$ est asymptote oblique en $\pm\infty$.

Exercice 7

Soit $f(x) = x + \sin x$. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses points à tangente horizontale.

Correction

$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, nulle seulement pour $x = \pi + 2k\pi$: f est croissante. Les tangentes horizontales sont aux points d'abscisses $\pi + 2k\pi$.