

2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 2

# Dérivation et étude des fonctions

---

Dérivée de la réciproque · Convexité · Étude complète

# Ce que nous allons apprendre

---

- Dérivées de référence et opérations
- Dérivée d'une composée
- Dérivée de la fonction réciproque
- Théorème de Rolle et accroissements finis
- Convexité et point d'inflexion
- Une étude de fonction complète

# Les dérivées usuelles

| $f(x)$        | $f'(x)$               |
|---------------|-----------------------|
| $x^n$         | $nx^{n-1}$            |
| $\sqrt{x}$    | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$      |
| $\sin x$      | $\cos x$              |
| $\tan x$      | $1 + \tan^2 x$        |

## Produit, quotient, composée

| Expression    | Dérivée                 |
|---------------|-------------------------|
| $uv$          | $u'v + uv'$             |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| $u^n$         | $nu'u^{n-1}$            |
| $\sqrt{u}$    | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$  |
| $g \circ u$   | $u' \times g'(u)$       |

## Dériver $f^{-1}$

#### FORMULE

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

valable lorsque  $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ .

**Exemple.**  $f(x) = x^3$  et  $y = 8$  :  $f^{-1}(8) = 2$ ,  $f'(2) = 12$ , donc  
 $(f^{-1})'(8) = \frac{1}{12}$ .

## Deux théorèmes jumeaux

### ROLLE

$f$  continue sur  $[a; b]$ , dérivable sur  $]a; b[$  et  $f(a) = f(b)$  : il existe  $c$  tel que  $f'(c) = 0$ .

### ACCROISSEMENTS FINIS

$$\exists c \in ]a; b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

## Le signe de $f'$

| Sur $I$                     | Conclusion                   |
|-----------------------------|------------------------------|
| $f' > 0$                    | $f$ strictement croissante   |
| $f' < 0$                    | $f$ strictement décroissante |
| $f' = 0$                    | $f$ constante                |
| $f'$ change de signe en $a$ | extremum local en $a$        |

## Le signe de $f''$

| Sur $I$               | Courbe                                    |
|-----------------------|-------------------------------------------|
| $f'' > 0$             | <b>convexe</b> : au-dessus des tangentes  |
| $f'' < 0$             | <b>concave</b> : au-dessous des tangentes |
| $f''$ change de signe | <b>point d'inflexion</b>                  |

# Asymptotes

| Limite                                 | Asymptote            |
|----------------------------------------|----------------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f = \pm\infty$ | verticale $x = a$    |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} f = b$    | horizontale $y = b$  |
| $\lim (f(x) - (ax + b)) = 0$           | oblique $y = ax + b$ |

## APPLICATION 1

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

---

- ➊ Domaine  $\mathbb{R}^*$  ;  $f$  est **impaire**.
- ➋  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ , nulle en  $\pm 1$ .
- ➌ Minimum  $f(1) = 2$  sur  $]0; +\infty[$ , maximum  $f(-1) = -2$  sur  $] -\infty; 0[$ .

## Les asymptotes

- 1  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty$  : asymptote verticale  $x = 0$ .
- 2  $f(x) - x = \frac{1}{x} \rightarrow 0$  : asymptote **oblique**  $y = x$ .
- 3 Pour  $x > 0$ ,  $\frac{1}{x} > 0$  : la courbe est **au-dessus** de l'asymptote.

## APPLICATION 2

$$\underline{f(x) = x^3 - 3x}$$

- ➊  $f'(x) = 3(x^2 - 1)$  : maximum  $f(-1) = 2$ , minimum  $f(1) = -2$ .
- ➋  $f''(x) = 6x$  : **point d'inflexion** en  $O(0; 0)$ .
- ➌ Concave sur  $] -\infty; 0]$ , convexe sur  $[0; +\infty[$ .

# L'essentiel de la leçon

| Outil      | Énoncé                          |
|------------|---------------------------------|
| Composée   | $(g \circ u)' = u' g'(u)$       |
| Réciproque | $\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$       |
| Monotonie  | signe de $f'$                   |
| Convexité  | signe de $f''$                  |
| Oblique    | $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$ |