



Limites et continuité — Exercices d'approfondissement

2ème Bac · Limites et continuité

Série 2 — indéterminations, continuité, TVI et fonction réciproque.

Exercice 1

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x)$.

Correction

En $+\infty$. Le conjugué donne $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$; en factorisant par x au dénominateur, la limite vaut $\frac{1}{2}$. **En $-\infty$.** Le conjugué donne $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$. Ici $\sqrt{x^2+x+1} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$, donc le dénominateur se comporte comme $-2x$. Le quotient tend alors vers $\frac{x}{-2x} = -\frac{1}{2}$.

Exercice 2

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

Correction

Conjugué : $\frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \rightarrow 1$.

Exercice 3

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

Correction

$\frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{x}{\sin x} \rightarrow \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

Exercice 4

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction

Sur $\mathbb{R}^*$, f est un quotient de fonctions continues de dénominateur non nul. En 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0) : \text{la fonction est continue en } 0, \text{ donc sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 5

Soit $f(x) = x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre $f(x) = 2$ puis donner $f^{-1}(2)$.

Correction

1. f est continue et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: strictement croissante, avec des limites $\mp\infty$ en $\mp\infty$: c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$ donne $x = 1$ (le second facteur a un discriminant négatif) : $f^{-1}(2) = 1$.

Exercice 6

Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Correction

Soit $g(x) = \cos x - x$: g est continue, $g'(x) = -\sin x - 1 < 0$ sur l'intervalle, donc strictement décroissante. $g(0) = 1 > 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$: il y a une **unique** solution.

Exercice 7

Soit f continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$.

Correction

Soit $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$ sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$: g est continue. $g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$. Les deux valeurs sont opposées : d'après le TVI, g s'annule en un point c .