

2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 1

Limites et continuité

Formes indéterminées · TVI · Fonction réciproque

Ce que nous allons apprendre

- Limites de référence et opérations
- Lever une forme indéterminée
- Limites avec radicaux
- Continuité et prolongement
- Le théorème des valeurs intermédiaires
- Fonction réciproque et racine n -ième

Les limites à connaître

Limite	Valeur
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$	0
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	1
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$	$\frac{1}{2}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$	1

Quatre cas à lever

LES FORMES

$$\frac{0}{0} \cdot \frac{\infty}{\infty} \cdot \infty - \infty \cdot 0 \times \infty$$

LES OUTILS

Factoriser le terme dominant · **simplifier** par la racine commune · **multiplier** par la quantité conjuguée.

2 · UN QUOTIENT

La forme $\frac{0}{0}$

Exemple. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$

- ➊ Numérateur et dénominateur s'annulent en 2.
- ➋ $\frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$
- ➌ La limite vaut 4.

La quantité conjuguée

Exemple. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right).$

- 1 Je multiplie par $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$.
- 2 L'expression devient $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.
- 3 Le dénominateur tend vers $+\infty$: la limite est 0.

Quand $\sqrt{x^2} = -x$

RÈGLE

$\sqrt{x^2} = |x|$: pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$.

Exemple. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} + x \right)$.

1 Conjuguée : $\frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x}$.

2 $\sqrt{x^2 + x} = -x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ donne $\frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$, de limite $-\frac{1}{2}$.

Trois conditions

EN UN POINT a

f est définie en a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, et cette limite vaut $f(a)$.

À RETENIR

Polynômes, $\sin$, $\cos$ sont continus sur $\mathbb{R}$; une fraction rationnelle l'est sur son domaine.

Comblé un trou

Exemple. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- 1 Pour $x \neq 1$: $f(x) = x + 1$.
- 2 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$: la limite est finie.
- 3 En posant $g(1) = 2$, g est **continue** sur $\mathbb{R}$.

Théorème des valeurs intermédiaires

ÉNONCÉ

Si f est **continue** sur $[a ; b]$, alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet **au moins** une solution dans $[a ; b]$.

UNICITÉ

Si de plus f est **strictement monotone**, la solution est **unique**.

Localiser une racine

Exemple. $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0 ; 1]$.

- ➊ f est continue et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: strictement croissante.
- ➋ $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$: une racine α **unique**.
- ➌ $f(0,6) < 0$ et $f(0,7) > 0$: $\alpha \in]0,6 ; 0,7[$.

Bijection et racine n -ième

THÉORÈME

Si f est continue et **strictement monotone** sur I , elle réalise une **bijection** de I sur $f(I)$, et f^{-1} est continue, de même sens de variation.

CONSÉQUENCE

$x \mapsto x^n$ est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur lui-même : on définit $\sqrt[n]{a}$, avec $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

L'essentiel de la leçon

Situation	Méthode
$\frac{0}{0}$ polynomiale	factoriser
$\infty - \infty$ avec racines	conjuguée
Limite en $-\infty$	$\sqrt{x^2} = -x$
Trou en a	prolongement continu
Équation $f(x) = k$	TVI + monotonie