

2ÈME BAC SCIENCES PHYSIQUES & SVT · LEÇON 11

Probabilités

Conditionnelles · Bayes · Loi binomiale

Ce que nous allons apprendre

- Calculer une probabilité par dénombrement
- Réunion et contraire
- Probabilités conditionnelles
- Indépendance
- Probabilités totales et Bayes
- La loi binomiale

Quatre formules

Formule	Énoncé
Équiprobabilité	$P(A) = \frac{\text{favorables}}{\text{possibles}}$
Contraire	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Réunion	$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Conditionnelle	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Un tirage simultané

Exemple. Urne : 5 rouges, 3 noires ; on tire 2 boules.

- 1 Total : $\binom{8}{2} = 28$.
- 2 Deux rouges : $\binom{5}{2} = 10$, donc $P = \frac{5}{14}$.
- 3 Au moins une noire : $1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$.

Un test simple

CRITÈRE

A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Exemple. $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,2$.

- ❶ $P(A)P(B) = 0,2$: les événements sont **indépendants**.
- ❷ $P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7$.

ATTENTION

Indépendants n'est pas la même chose qu'**incompatibles**.

Multiplier puis additionner

RÈGLES

On **multiplie** les probabilités le long d'une branche, on **additionne** entre les branches conduisant au même événement.

PROBABILITÉS TOTALES

$$P(A) = \sum_i P(B_i) P(A \mid B_i)$$

où les B_i forment une partition.

Retourner le conditionnement

FORMULE

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) P(A \mid B)}{P(A)}$$

Exemple. Maladie à 2 % ; test positif chez 95 % des malades et 3 % des sains.

❶ $P(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,03 = 0,0484.$

❷ $P(M \mid T) = \frac{0,019}{0,0484} \approx 0,39.$

Un résultat contre-intuitif

CONSTAT

Même avec un test fiable à 95 %, un positif n'a qu'environ **39 %** de chances d'être malade.

EXPLICATION

La maladie est **rare** : les faux positifs, pris sur une très grande population saine, sont nombreux.

Répéter une épreuve

CONDITIONS

n épreuves **identiques** et **indépendantes**, chacune à deux issues, de probabilité de succès p .

FORMULES

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$$

Exactement k succès

Exemple. $n = 5$, $p = 0,3$, exactement 2 succès.

- 1 $\binom{5}{2} = 10$.
- 2 $(0,3)^2(0,7)^3 = 0,09 \times 0,343$.
- 3 $P(X = 2) = 10 \times 0,03087 = 0,3087$.

APPLICATION 1

Deux machines

Énoncé. A produit 60 % avec 2 % de défauts ; B produit 40 % avec 5 %.

1 $P(D) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,032.$

2 $P(A | D) = \frac{0,012}{0,032}.$

3 $P(A | D) = 0,375.$

APPLICATION 2

Une somme de dés

Énoncé. Deux dés équilibrés, X la somme obtenue.

❶ X prend les valeurs de 2 à 12 ; il y a 36 issues.

❷
$$P(X = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

❸
$$P(X \geq 10) = \frac{3 + 2 + 1}{36} = \frac{1}{6}.$$

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Conditionnelle	$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Indépendance	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$
Totales	$\sum P(B_i)P(A B_i)$
Binomiale	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
Espérance	np