

2ÈME BAC SCIENCES PHYSIQUES & SVT · LEÇON 10

Géométrie dans l'espace

Produit scalaire · Plans · Sphères

Ce que nous allons apprendre

- Produit scalaire dans l'espace
- Équation cartésienne d'un plan
- Vecteur normal
- Distance d'un point à un plan
- Équation d'une sphère
- Position relative plan-sphère

Trois coordonnées

FORMULE (REPÈRE ORTHONORMÉ)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

ORTHOGONALITÉ

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Exemple. $\vec{u}(1; 2; -1)$ et $\vec{v}(3; -1; 1)$: $3 - 2 - 1 = 0$, ils sont orthogonaux.

Équation cartésienne

FORMULE

Plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

Exemple. $A(1; 0; 2)$ et $\vec{n}(2; -1; 3)$.

❶ $2(x - 1) - y + 3(z - 2) = 0.$

❷ $2x - y + 3z - 8 = 0.$

Du plan à la normale

RÈGLE

Dans $ax + by + cz + d = 0$, le vecteur $\vec{n}(a ; b ; c)$ est **normal** au plan.

CONSÉQUENCE

Une droite orthogonale au plan est **dirigée** par $\vec{n}$.

Exemple. Droite par $A(2 ; -1 ; 0)$ orthogonale à $x - 2y + z = 0$: $x = 2 + t$, $y = -1 - 2t$, $z = t$.

D'un point à un plan

FORMULE

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemple. $A(1 ; 2 ; 3)$ et $x + 2y - 2z + 5 = 0$.

- ➊ Numérateur : $|1 + 4 - 6 + 5| = 4$.
- ➋ Dénominateur : $\sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.
- ➌ $d = \frac{4}{3}$.

Centre et rayon

ÉQUATION RÉDUITE

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2$$

Exemple. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$.

- ➊ Je complète les trois carrés.
- ➋ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$.
- ➌ Centre $\Omega(1 ; -2 ; 3)$ et rayon 3.

Comparer d et R

Comparaison	Section
$d < R$	cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$
$d = R$	un point : plan tangent
$d > R$	aucune intersection
$d = 0$	grand cercle (plan par le centre)

L'équation « par les intercepts »

Exemple. $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$.

- ➊ Le plan a pour équation $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.
- ➋ En multipliant par 6 : $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
- ➌ Vérification : chacun des trois points annule l'équation.

Les réflexes de l'exercice

On demande...	J'utilise...
une équation de plan	un point et une normale
la distance point-plan	la formule avec valeur absolue
centre et rayon	compléter les carrés
la section plan-sphère	comparer d et R

APPLICATION 1

Un grand cercle

Énoncé. Plan $2x - y + 2z - 3 = 0$ et sphère de centre $\Omega(1; 1; 1)$, rayon 2.

- 1 $d = \frac{|2 - 1 + 2 - 3|}{3} = 0.$
- 2 Le plan passe par le centre.
- 3 La section est un **grand cercle** de rayon 2.

APPLICATION 2

Une sphère développée

Énoncé. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

- 1** $(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 + z^2 - 4 = 0$.
- 2** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$.
- 3** Centre $(2; -1; 0)$, rayon 3.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Produit scalaire	$xx' + yy' + zz'$
Plan	$ax + by + cz + d = 0$
Normale	$\vec{n}(a; b; c)$
Distance	$\frac{ \dots }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
Section plan-sphère	$\sqrt{R^2 - d^2}$