

2ÈME BAC SCIENCES PHYSIQUES & SVT · LEÇON 9

Équations différentielles

Premier ordre · Second ordre · Modèles

Ce que nous allons apprendre

- L'équation $y' = ay$
- Les conditions initiales
- L'équation caractéristique
- Les trois cas du second ordre
- Désintégration radioactive
- Circuits électriques

La solution type

THÉORÈME

$$y' = ay \implies y(x) = Ce^{ax}$$

FORME ÉQUIVALENTE

$y' + ay = 0$ donne $y(x) = Ce^{-ax}$: attention au **signe**.

CONDITION INITIALE

Une donnée $y(x_0) = y_0$ détermine C de façon unique.

Avec condition initiale

- ➊ $y' = 3y$ et $y(0) = 5 : y(x) = 5e^{3x}$.
- ➋ $y' + 2y = 0$ et $y(1) = e^{-2} : y(x) = Ce^{-2x}$ avec $C = 1$.
- ➌ Donc $y(x) = e^{-2x}$.

L'équation caractéristique

PRINCIPE

Pour $ay'' + by' + cy = 0$, on résout $ar^2 + br + c = 0$.

Discriminant	Solutions
$\Delta > 0$, racines r_1, r_2	$Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$
$\Delta = 0$, racine double r	$(Ax + B)e^{rx}$
$\Delta < 0$, $r = \alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

2 · TROIS EXEMPLES

Un par cas

- ❶ $y'' - 4y = 0 : r = \pm 2$, donc $Ae^{2x} + Be^{-2x}$.
- ❷ $y'' - 6y' + 9y = 0 : r = 3$ double, donc $(Ax + B)e^{3x}$.
- ❸ $y'' + 9y = 0 : r = \pm 3i$, donc $A \cos 3x + B \sin 3x$.

Deux données au second ordre

Exemple. $y'' - 4y = 0$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

- ❶ $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$ et $y'(x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$.
- ❷ $A + B = 2$ et $2A - 2B = 0$.
- ❸ $A = B = 1$, donc $y(x) = e^{2x} + e^{-2x}$.

La loi de décroissance

MODÈLE

$$N'(t) = -\lambda N(t) \text{ avec } N(0) = N_0, \text{ donc } N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Demi-vie. Temps T au bout duquel il reste la moitié.

- ❶ $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}.$
- ❷ $-\lambda T = -\ln 2.$
- ❸ $T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$

Décharge d'un condensateur

ÉQUATION

$$u' + \frac{u}{RC} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

INTERPRÉTATION

La tension tend vers 0 ; la constante de temps $\tau = RC$ mesure la rapidité de la décharge.

Le cas $\Delta < 0$

MODÈLE

$y'' + \omega^2 y = 0$ donne $y = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$: un mouvement **oscillant** de pulsation ω .

Exemple. $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

- 1 $\omega = 4$: $y = A \cos 4t + B \sin 4t$.
- 2 $A = 1$ et $4B = 4$ donnent $B = 1$.

APPLICATION 1

Une désintégration

Énoncé. $N'(t) = -0,02N(t)$ avec $N(0) = 500$.

- ➊ $N(t) = 500e^{-0,02t}$.
- ➋ Demi-vie : $T = \frac{\ln 2}{0,02}$.
- ➌ $T \approx 34,7$ unités de temps.

APPLICATION 2

Un second ordre

Énoncé. Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 0$.

- 1 $r^2 - 5r + 6 = 0$.
- 2 $r = 2$ ou $r = 3$.
- 3 $y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$.

L'essentiel de la leçon

Équation	Solutions
$y' = ay$	Ce^{ax}
$\Delta > 0$	$Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$
$\Delta = 0$	$(Ax + B)e^{rx}$
$y'' + \omega^2y = 0$	$A \cos \omega x + B \sin \omega x$
Demi-vie	$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$