

2ÈME BAC SCIENCES PHYSIQUES & SVT · LEÇON 8

Calcul intégral

Primitives · Propriétés · Aires · IPP

Ce que nous allons apprendre

- Intégrale et primitive
- Les propriétés de l'intégrale
- Les formes composées
- L'intégration par parties
- Le calcul d'aires
- La valeur moyenne

Par une primitive

THÉORÈME FONDAMENTAL

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f .

REMARQUE

La constante disparaît dans la soustraction : le choix de la primitive n'a pas d'importance.

Les règles de calcul

Propriété	Énoncé
Linéarité	$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$
Chasles	$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$
Inversion	$\int_b^a f = - \int_a^b f$
Positivité	$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

3 · FORMES COMPOSÉES

Les reconnaître vite

Intégrande	Primitive
$u' u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$u' e^u$	e^u
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a}$

EXEMPLE

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = [\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \ln 2.$$

La formule

IPP

$$\int_a^b u v' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u' v dx$$

CHOIX DE u

On prend pour u la partie qui se **simplifie** en dérivant : un polynôme, ou $\ln x$.

4 · DEUX EXEMPLES

Avec e^x et avec $\ln$

Exemple 1. $\int_0^1 x e^x dx.$

1 $u = x, v' = e^x : [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1.$

Exemple 2. $\int_1^e \ln x dx.$

2 $u = \ln x, v' = 1 : [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1.$

Sous une courbe, entre deux courbes

RÈGLES

Si $f \geq 0$ sur $[a ; b]$, l'aire sous la courbe vaut $\int_a^b f$. Entre deux courbes avec $f \geq g$, elle vaut $\int_a^b (f - g)$.

Exemple. Entre $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0 ; 1]$.

❶ $\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.$

❷ L'aire vaut $\frac{1}{6}$ unité d'aire.

Une hauteur équivalente

DÉFINITION

$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

INTERPRÉTATION

C'est la hauteur du rectangle de même base et de même aire que le domaine sous la courbe.

Une fonction définie par une intégrale

Exemple. $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ pour $x > 0$.

❶ $F'(x) = \frac{1}{x}.$

❷ $F(1) = 0.$

❸ C'est exactement la fonction **ln**.

APPLICATION 1

Trois intégrales

$$\textcircled{1} \int_0^3 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_0^3 = 12.$$

$$\textcircled{2} \int_0^1 e^{3x} dx = \frac{e^3 - 1}{3}.$$

$$\textcircled{3} \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_1^4 = 2.$$

APPLICATION 2

Une aire

Énoncé. Aire entre la courbe de $f(x) = 4 - x^2$ et l'axe des abscisses.

1 La courbe coupe l'axe en -2 et 2 , et $f \geq 0$ entre.

2
$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2.$$

3 L'aire vaut $\frac{32}{3}$ unités d'aire.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Calcul	$F(b) - F(a)$
Chasles	$\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$
IPP	$[uv] - \int u'v$
Aire entre deux courbes	$\int (f - g)$
Valeur moyenne	$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$