

2ÈME BAC SCIENCES PHYSIQUES & SVT · LEÇON 7

Nombres complexes

Forme algébrique · Module · Lieux

Ce que nous allons apprendre

- Forme algébrique et conjugué
- Module et argument
- Forme trigonométrique
- Équations du second degré dans $\mathbb{C}$
- Interprétation géométrique
- Lieux géométriques

Calculer avec i

BASE

$z = a + ib$ avec $i^2 = -1$; $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Exemple. $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 1 - i$.

1 $z_1 + z_2 = 4 + i$.

2 $z_1 z_2 = 3 - 3i + 2i + 2 = 5 - i$.

Diviser deux complexes

MÉTHODE

On multiplie numérateur et dénominateur par le **conjugué** du dénominateur ; $z\bar{z} = |z|^2$ est réel.

Exemple. $\frac{3 + 2i}{1 - i}$.

❶ On multiplie par $1 + i$ en haut et en bas.

❷
$$\frac{(3 + 2i)(1 + i)}{2} = \frac{1 + 5i}{2}.$$

La forme trigonométrique

FORMULES

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos \theta = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

Exemple. $z = 1 + i\sqrt{3}$.

- ❶ $|z| = 2$.
- ❷ $\cos \theta = \frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{3}.$

Quand $\Delta < 0$

FORMULE

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple. $z^2 - 4z + 13 = 0$.

- 1 $\Delta = 16 - 52 = -36$.
- 2 $\sqrt{-\Delta} = 6$, donc $z = 2 \pm 3i$.
- 3 Les deux racines sont **conjuguées**.

Affixes et distances

Écriture	Interprétation
$ z_B - z_A $	la distance AB
$ z - z_A = r$	cercle de centre A , rayon r
$ z - z_A = z - z_B $	médiatrice de $[AB]$

EXEMPLE

$|z - 2i| = 3$: cercle de centre $(0; 2)$ et de rayon 3.

Comparer des modules

Exemple. $a = 1$, $b = 3 + 2i$, $c = -1 + 2i$.

- ➊ $AB = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$.
- ➋ $AC = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$.
- ➌ $AB = AC$: le triangle est **isocèle en A**.

Deux propriétés utiles

FORMULES

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 [2\pi]$$

Exemple. $z = \frac{1+i}{1-i}$.

❶ $z = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i.$

❷ Module 1, argument $\frac{\pi}{2}$.

APPLICATION 1

Deux lieux

Énoncé. Décrire les ensembles suivants.

- 1 $|z + 1| = 2$: cercle de centre $(-1 ; 0)$, rayon 2.
- 2 $|z - i| = |z + i|$: médiatrice de $[AB]$ avec $A(0 ; 1)$ et $B(0 ; -1)$.
- 3 C'est l'**axe des abscisses**.

APPLICATION 2

Une division

Énoncé. $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$. Calculer $\frac{z_1}{z_2}$.

- ➊ Conjugué de z_2 : $1 + 2i$, et $|z_2|^2 = 5$.
- ➋ $(2 + 3i)(1 + 2i) = 2 + 4i + 3i - 6 = -4 + 7i$.
- ➌ Le quotient vaut $\frac{-4 + 7i}{5}$.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Module	$\sqrt{a^2 + b^2}$
Quotient	multiplier par le conjugué
$\Delta < 0$	$\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
Cercle	$ z - z_A = r$
Médiatrice	$ z - z_A = z - z_B $