

2ÈME BAC SCIENCES PHYSIQUES & SVT · LEÇON 6

Fonction exponentielle

Propriétés · Limites · Modèles physiques

Ce que nous allons apprendre

- Définition comme réciproque de $\ln$
- Les propriétés algébriques
- Dérivée et primitives
- Limites et croissances comparées
- Équations et inéquations
- Modèles d'évolution

1 · DÉFINITION

La réciproque de $\ln$

DÉFINITION

$$e^x = y \iff x = \ln y \quad (y > 0)$$

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES

$e^x > 0$ pour tout x ; $e^0 = 1$; $\exp$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCE

Une équation $e^u = e^v$ équivaut à $u = v$.

Les règles de calcul

Expression	Devient
e^{a+b}	$e^a e^b$
e^{a-b}	$\frac{e^a}{e^b}$
$(e^a)^n$	e^{na}
$(e^u)'$	$u' e^u$
Primitive de $u' e^u$	e^u

L'exponentielle l'emporte

AUX BORNES

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

CROISSANCES COMPARÉES

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

4 · ÉQUATIONS

Poser $X = e^x$

Exemple. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

- ❶ $X = e^x > 0 : X^2 - 3X + 2 = 0$.
- ❷ $X = 1$ ou $X = 2$: les deux sont positifs.
- ❸ $x = 0$ ou $x = \ln 2$.

La croissance aide

RÈGLE

exp est croissante : $e^u < e^v \iff u < v$, et $e^x > k$ (avec $k > 0$) équivaut à $x > \ln k$.

- 1 $e^{x+1} = e^{2x-3}$ donne $x = 4$.
- 2 $e^x > 5$ donne $x > \ln 5$.
- 3 Une solution $X \leq 0$ est toujours à **rejeter**.

5 · UNE ÉTUDE

$$\underline{f(x) = xe^{-x}}$$

- ❶ $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$, du signe de $1 - x$.
- ❷ Maximum $f(1) = e^{-1}$.
- ❸ Limites : $-\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$.

6 · UNE INÉGALITÉ

$$\underline{e^x \geq x + 1}$$

Démonstration. Soit $g(x) = e^x - x - 1$.

- ❶ $g'(x) = e^x - 1$, qui s'annule en 0 en changeant de signe.
- ❷ Le minimum vaut $g(0) = 0$.
- ❸ Donc $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $e^x \geq x + 1$.

Deux formes clés

$f(x)$	Une primitive
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a}$
$u'e^u$	e^u
xe^{x^2}	$\frac{e^{x^2}}{2}$
$\frac{e^x}{e^x+1}$	$\ln(e^x + 1)$

APPLICATION 1

Un refroidissement

Énoncé. $T(t) = 20 + 60e^{-0,1t}$ (°C, t en minutes).

- ➊ $T(0) = 80$ °C.
- ➋ $e^{-0,1t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.
- ➌ $T(t) \rightarrow 20$ °C : la température ambiante.

APPLICATION 2

Une étude complète

Énoncé. $f(x) = (x - 1)e^x$.

- 1 $f'(x) = xe^x$, du signe de x .
- 2 Minimum $f(0) = -1$.
- 3 Limites : 0 en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Réciproque	$e^x = y \iff x = \ln y$
Produit	$e^{a+b} = e^a e^b$
Dérivée	$(e^u)' = u' e^u$
Croissances comparées	$\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$
Inégalité	$e^x \geq x + 1$