

2ÈME BAC SCIENCES PHYSIQUES & SVT · LEÇON 5

Fonction logarithme népérien

Propriétés · Croissances comparées · Études

Ce que nous allons apprendre

- Définition et domaine
- Les propriétés algébriques
- Dérivée et primitives
- Limites et croissances comparées
- Équations et inéquations
- Études de fonctions

1 · DÉFINITION

La primitive de $\frac{1}{x}$

DÉFINITION

$\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$: c'est la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

CONSÉQUENCES

$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, et $\ln$ est **strictement croissante**.

SIGNE

$\ln x < 0$ sur $]0; 1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1; +\infty[$.

Transformer les opérations

Expression	Devient
$\ln(ab)$	$\ln a + \ln b$
$\ln \frac{a}{b}$	$\ln a - \ln b$
$\ln(a^n)$	$n \ln a$
$\ln \sqrt{a}$	$\frac{1}{2} \ln a$
$(\ln u)'$	$\frac{u'}{u}$

Croissances comparées

AUX BORNES

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

COMPARAISONS

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

À RETENIR

La puissance « l'emporte » toujours sur le logarithme.

Toujours la condition

Exemple. $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln 8$.

- 1 Condition : $x > 1$.
- 2 $\ln(x^2 - 1) = \ln 8$ donne $x^2 = 9$.
- 3 $x = 3$ (on rejette -3).

Poser $X = \ln x$

Exemple. $\ln^2 x - 3 \ln x + 2 = 0$.

- ❶ $X^2 - 3X + 2 = 0$ donne $X = 1$ ou $X = 2$.
- ❷ $\ln x = 1$ donne $x = e$.
- ❸ $\ln x = 2$ donne $x = e^2$.

5 · UNE ÉTUDE

$$\underline{f(x) = x - \ln x}$$

- ❶ $D_f =]0; +\infty[.$
- ❷ $f'(x) = \frac{x-1}{x}$: négative sur $]0; 1[$, positive après.
- ❸ Minimum $f(1) = 1$, d'où l'inégalité $\ln x \leq x - 1$.

Une fonction paire

Exemple. $g(x) = \ln(x^2 + 1)$.

- ❶ $D_g = \mathbb{R}$ car $x^2 + 1 > 0$.
- ❷ $g(-x) = g(x)$: la fonction est **paire**.
- ❸ $g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, du signe de x : minimum $g(0) = 0$.

Deux formes à repérer

FORMES

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln u \quad (u > 0)$$

$$\int u' u dx = \frac{u^2}{2}$$

Exemple. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- ❶ C'est $u'u$ avec $u = \ln x$.
- ❷ Une primitive est $\frac{\ln^2 x}{2}$.

APPLICATION 1

Une inéquation

Énoncé. Résoudre $\ln(2x - 3) \leq 0$.

- ➊ Condition : $x > 1,5$.
- ➋ $\ln$ croît : $2x - 3 \leq 1$, donc $x \leq 2$.
- ➌ $S =]1,5 ; 2]$.

APPLICATION 2

Un maximum

Énoncé. $f(x) = \ln x - x + 2$ sur $]0 ; +\infty[$.

- ➊ $f'(x) = \frac{1 - x}{x}$.
- ➋ Positive sur $]0 ; 1[$, négative après.
- ➌ Maximum $f(1) = 1$; limites $-\infty$ aux deux bornes.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Produit	$\ln a + \ln b$
Dérivée	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
Croissances comparées	$\frac{\ln x}{x^n} \rightarrow 0$
Équation du second degré	poser $X = \ln x$
Inégalité	$\ln x \leq x - 1$