

2ÈME BAC SCIENCES PHYSIQUES & SVT · LEÇON 4

Fonctions primitives

Formes usuelles · Composées · Cinématique

Ce que nous allons apprendre

- Définition d'une primitive
- Les primitives usuelles
- Les formes composées
- La constante d'intégration
- Condition initiale
- Applications en physique

1 · DÉFINITION

L'opération inverse

DÉFINITION

F est une primitive de f sur I si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

UNICITÉ À UNE CONSTANTE PRÈS

Si F est une primitive, toutes les primitives sont les $F + C$, avec C constante.

VÉRIFICATION

Pour contrôler un résultat, il suffit de le **dériver**.

2 · PRIMITIVES USUELLES

Le tableau de base

$f(x)$	Une primitive
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	$\ln x$
$\sin x / \cos x$	$-\cos x / \sin x$

3 · FORMES COMPOSÉES

Reconnaître u'

$f(x)$	Une primitive
$u' u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u} \ (u > 0)$	$\ln u$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$u' e^u$	e^u
$u' \cos u$	$\sin u$

Quand u' manque

MÉTHODE

Je fais apparaître u' en multipliant et divisant par la constante qui convient.

1 $(2x + 1)^5 : u' = 2$, donc une primitive est $\frac{(2x + 1)^6}{12}$.

2 $\frac{1}{(3x + 2)^2} : u' = 2$, donc une primitive est $-\frac{1}{3(3x + 2)}$.

3 $\sin(3x) : u' = 3$, donc une primitive est $-\frac{\cos(3x)}{3}$.

Logarithme et racine

Exemple 1. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

1 C'est $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1 > 0$: $F(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Exemple 2. $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

2 C'est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$: $G(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Fixer la constante

PRINCIPE

Une seule primitive vérifie $F(x_0) = y_0$: on détermine C avec cette donnée.

Exemple. Primitive de $3x^2 - 2x$ avec $F(1) = 5$.

- ❶ $F(x) = x^3 - x^2 + C.$
- ❷ $F(1) = C = 5.$
- ❸ $F(x) = x^3 - x^2 + 5.$

De l'accélération à la position

CHAÎNE

$a(t) \xrightarrow{\text{primitive}} v(t) \xrightarrow{\text{primitive}} x(t)$, avec à chaque étape une condition initiale.

Exemple. $a(t) = 4$, $v(0) = 3$, $x(0) = 0$.

- 1 $v(t) = 4t + 3$.
- 2 $x(t) = 2t^2 + 3t$.

APPLICATION 1

Un mobile

Énoncé. $v(t) = 6t - 4$ m/s et $x(0) = 5$ m.

- ➊ $x(t)$ est une primitive de v : $3t^2 - 4t + C$.
- ➋ $x(0) = C = 5$.
- ➌ $x(t) = 3t^2 - 4t + 5$.

APPLICATION 2

Trois primitives

1 $4x^3 - 6x + 1$ donne $x^4 - 3x^2 + x$.

2 $(3x - 2)^4$ donne $\frac{(3x - 2)^5}{15}$.

3 $\frac{3x^2}{x^3 + 5}$ donne $\ln(x^3 + 5)$ là où $x^3 + 5 > 0$.

L'essentiel de la leçon

Forme	Primitive
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$(ax + b)^n$	diviser par $a(n + 1)$
Condition initiale	détermine C