

2ÈME BAC SCIENCES PHYSIQUES & SVT · LEÇON 3

Suites numériques

Convergence · Encadrements · Point fixe

Ce que nous allons apprendre

- Limites de suites usuelles
- Le théorème des gendarmes
- Encadrement par récurrence
- Monotonie
- Convergence monotone
- Suites auxiliaires et point fixe

Quotients et puissances

Suite	Limite
$\frac{3n^2 - n}{n^2 + 2}$	3
q^n avec $ q < 1$	0
q^n avec $q > 1$	$+\infty$
$\frac{1}{n}$	0

ASTUCE

Pour $\frac{2^n}{3^n + 1}$, on factorise par 3^n : la limite vaut 0.

Encadrer pour conclure

THÉORÈME

Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si v_n et w_n ont la **même** limite, alors u_n tend vers cette limite.

Exemple. $u_n = \frac{\sin n}{n}$.

① $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

② Les deux bornes tendent vers 0 : $u_n \rightarrow 0$.

Par récurrence

Exemple. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{2}$.

- ➊ **Initialisation** : $0 \leq u_0 \leq 4$ ✓.
- ➋ Si $0 \leq u_n \leq 4$, alors $4 \leq u_n + 4 \leq 8$.
- ➌ Donc $2 \leq u_{n+1} \leq 4$: l'encadrement est conservé.

Le signe de la différence

Suite de l'exemple.

- 1 $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 4}{2} - u_n = \frac{4 - u_n}{2}.$
- 2 Or $u_n \leq 4$, donc cette différence est positive.
- 3 La suite est **croissante**.

Le théorème décisif

THÉORÈME

Toute suite **croissante et majorée** converge ; toute suite **décroissante et minorée** converge.

POINT FIXE

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ et si f est continue, alors $\ell = f(\ell)$.

ATTENTION

Le théorème donne l'existence de la limite, pas sa valeur : le point fixe la fournit ensuite.

Trouver l'expression explicite

Suite de l'exemple. On pose $v_n = u_n - 4$.

1
$$v_{n+1} = \frac{u_n + 4}{2} - 4 = \frac{u_n - 4}{2} = \frac{1}{2}v_n.$$

2
$$v_0 = -4, \text{ donc } v_n = -4 \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

3
$$u_n = 4 - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow 4.$$

Discuter selon q

Valeur de q	Limite de $u_0 q^n$
$ q < 1$	0
$q = 1$	u_0
$q > 1$	infinie, du signe de u_0
$q \leq -1$	pas de limite

APPLICATION 1

Une suite décroissante

Énoncé. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

- ➊ Si $u_n \geq 3$, alors $2u_n + 3 \geq 9$, donc $u_{n+1} \geq 3$.
- ➋ $u_{n+1}^2 - u_n^2 = -(u_n - 3)(u_n + 1) \leq 0$.
- ➌ La suite est **décroissante** et minorée : elle converge.

APPLICATION 2

Une limite à factoriser

Énoncé. $u_n = \frac{3^n}{3^n + 2^n}.$

1 Je factorise par 3^n au dénominateur.

2 $u_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}.$

3 $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow 1$.

L'essentiel de la leçon

Outil	Usage
Gendarmes	suite bornée divisée par n
Récurrence	encadrement stable
Convergence monotone	croissante et majorée
Point fixe	valeur de la limite
Factoriser par q^n	quotient de puissances