



Dérivation et étude des fonctions — Exercices d'approfondissement

2ème Bac · Dérivation et étude des fonctions

Série 2 — dérivées, concavité et études complètes.

Exercice 1

Calculer la dérivée de :

1. $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^4$
2. $g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$
3. $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$

Correction

1. $f'(x) = 4(2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^3.$
2. $g'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - (2x - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 1)^2}.$
3. $h'(x) = \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}} = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}.$

Exercice 2

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Étudier la concavité et déterminer le point d'inflexion.

Correction

$f''(x) = 6x - 6$: la courbe est concave sur $] -\infty ; 1[$, convexe sur $]1 ; +\infty[$. Le point d'inflexion est $(1 ; 0)$.

Exercice 3

Soit $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

1. Simplifier $f(x)$ pour $x \neq 1$.
2. En déduire la nature de la courbe.

Correction

1. $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, donc $f(x) = x + 2$.
2. La courbe est la droite $y = x + 2$ **privée** du point d'abscisse 1.

Exercice 4

Soit $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

1. Déterminer D_f et les asymptotes.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.

Correction

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$: asymptote oblique $y = x + 1$ et verticale $x = 1$.
2. $f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$: maximum local $f(0) = 0$,
minimum local $f(2) = 4$.

Exercice 5

Déterminer les tangentes à la courbe de $f(x) = x^2 - 2x$ parallèles à la droite $y = 4x + 1$.

Correction

$f'(x) = 2x - 2 = 4$ donne $x = 3$; $f(3) = 3$. La tangente est $y = 4(x - 3) + 3 = 4x - 9$.

Exercice 6

Soit $f(x) = x + \frac{9}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer le minimum et l'interpréter géométriquement.

Correction

$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$ s'annule en $x = 3$; le minimum vaut 6. Parmi les rectangles d'aire 9, le **carré** de côté 3 a le plus petit demi-périmètre.

Exercice 7

Étudier la position de la courbe de $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ par rapport à son asymptote oblique.

Correction

$f(x) - (x + 1) = \frac{1}{x-1}$: positif pour $x > 1$ (courbe au-dessus), négatif pour $x < 1$ (courbe en dessous).