

2ÈME BAC SCIENCES PHYSIQUES & SVT · LEÇON 2

Dérivation et étude des fonctions

Composées · Concavité · Asymptotes

Ce que nous allons apprendre

- Les formules de dérivation
- Dérivées de fonctions composées
- Tableau de variations
- Concavité et points d'inflexion
- Asymptotes et position relative
- Optimisation

Opérations et composées

Expression	Dérivée
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n	$n u' u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin u / \cos u$	$u' \cos u / -u' \sin u$

Appliquer les règles

❶ $(x^2 - 3x + 1)^4$ donne $4(2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^3$.

❷ $\frac{2x - 1}{x^2 + 1}$ donne $\frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 1)^2}$.

❸ $\sqrt{x^2 + 4x}$ donne $\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$.

Du signe au tableau

RÈGLE

$f' > 0$ donne une fonction croissante ; $f' < 0$, décroissante ; un extremum exige un **changement de signe**.

Exemple. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

- ❶ $g'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$.
- ❷ Maximum local $g(1) = 4$; minimum local $g(3) = 0$.

3 · CONCAVITÉ

Le rôle de f''

Signe de f''	Courbe
$f'' > 0$	convexe
$f'' < 0$	concave
f'' change de signe	point d' inflexion

EXEMPLE

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 : f''(x) = 6x - 6$ s'annule en 1 : point d'inflexion (1 ; 0)

.

Par la division

Exemple. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

1 $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

2 Le reste tend vers 0 : la droite $y = x + 1$ est asymptote oblique.

3 Le signe du reste donne la **position** : au-dessus pour $x > 1$.

Le même exemple

- ❶ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; asymptote verticale $x = 1$.
- ❷ $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.
- ❸ Maximum local $f(0) = 0$; minimum local $f(2) = 4$.

Parallèle à une droite

MÉTHODE

La tangente en a est parallèle à $y = mx + p$ si $f'(a) = m$.

Exemple. $f(x) = x^2 - 2x$, parallèle à $y = 4x + 1$.

- ❶ $f'(x) = 2x - 2 = 4$ donne $x = 3$.
- ❷ $f(3) = 3$, donc la tangente est $y = 4x - 9$.

Un minimum utile

Exemple. $f(x) = x + \frac{9}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- ➊ $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$ s'annule en $x = 3$.
- ➋ Le minimum vaut 6.
- ➌ Parmi les rectangles d'aire 9, le **carré** a le plus petit demi-périmètre.

APPLICATION 1

Une courbe trouée

Énoncé. $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

- 1 $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.
- 2 Pour $x \neq 1$, $f(x) = x + 2$.
- 3 La courbe est la droite $y = x + 2$ **privée** d'un point.

APPLICATION 2

Une étude guidée

Énoncé. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- ➊ $f(x) = x + \frac{2}{x}$ et $f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}$.
- ➋ Minimum $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.
- ➌ Asymptote oblique $y = x$.

L'essentiel de la leçon

Notion	Point clé
Composée	ne pas oublier u'
Extremum	changement de signe de f'
Inflexion	changement de signe de f''
Asymptote oblique	division euclidienne
Position relative	signe du reste